GUIA DE CÁLCULO

Vinicius Cifú Lopes

Versão Preliminar

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Sumário

Leia-me! **vii**

I Bases 1

1 Funções em Perspectiva **3**
1.1 Primeiros exemplos . . . 3
1.2 Nomenclatura e propriedades . . . 11
1.3 Representação gráfica . . . 15
1.4 Translações e dilatações . . . 18
1.5 Simetrias, monotonias e limitações . . . 21
1.6 Novas funções . . . 24
1.7 Intuição *versus* definição . . . 26
1.8 Operações e comparações entre funções . . . 27

2 A Estrutura dos Números Reais **33**
2.1 Axiomas de corpo ordenado . . . 33
2.2 Pontos infinitos . . . 40
2.3 O Axioma do Supremo . . . 40
2.4 O Princípio da Indução . . . 46
2.5 Valor absoluto e a métrica da reta . . . 49
2.6 Vizinhanças e pontos importantes . . . 52
2.7 Conjuntos abertos e fechados . . . 55

3 Introdução aos Limites **61**
3.1 Atualidade, história e necessidade . . . 61
3.2 Exploração e formalização . . . 63
3.3 Definição I para domínios próprios . . . 69
3.4 Como calcular o limite? . . . 70
3.5 Definição II e a formulação com vizinhanças . . . 75

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

3.6 Limites nos infinitos e de sequências . . . 78
3.7 "Limites infinitos" . . . 81
3.8 Confronto, sanduíche ou *squeeze* . . . 85
3.9 Funções monótonas e o número e . . . 87
3.10 Limites notáveis . . . 89
3.11 Concepção de limites por sequências . . . 92
3.12 Continuidade . . . 93

4 Introdução à Derivação **97**
4.1 Motivação cinemática e definição . . . 97
4.2 Interpretação geométrica . . . 102
4.3 Como calcular derivadas? . . . 103
4.4 Outras interpretações . . . 111

II Uma Variável **117**

5 Análise Básica **119**
5.1 Lembretes . . . 119
5.2 O que são limites e seus tipos . . . 120
5.3 Cálculo de limites . . . 124
5.4 Confronto, sanduíche ou *squeeze* . . . 133
5.5 Regras de l'Hospital . . . 134
5.6 Definições de limites . . . 138
5.7 Continuidade . . . 142
5.8 Sequências e séries . . . 147

6 Derivação **155**
6.1 Motivação e definição . . . 155
6.2 Interpretação geométrica . . . 158
6.3 Regras de derivação simbólica . . . 159
6.4 Taxas relacionadas (*related rates*) . . . 169
6.5 Melhor aproximação linear e Newton–Raphson . . . 171
6.6 Propriedades e valor médio . . . 173
6.7 Polinômios de Taylor . . . 178

7 Comportamento de Funções **185**
7.1 Otimização . . . 185
7.2 Gráficos . . . 192

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

8 Primitivização **199**
8.1 O que são primitivas . . . 199
8.2 Inversão das regras de derivação . . . 201
8.3 Integrandos com formas específicas . . . 212

9 Integração Definida **223**
9.1 Motivação e definição . . . 223
9.2 Propriedades e cálculo . . . 231
9.3 Aplicações geométricas da integral . . . 239
9.4 Integrais impróprias . . . 244

III Várias Variáveis **249**

10 Os Espaços Euclideanos **251**
10.1 Várias variáveis ou vetores . . . 251
10.2 Métrica e topologia . . . 254
10.3 Limites e continuidade . . . 256
10.4 Componentes escalares . . . 257
10.5 Derivadas parciais . . . 259

11 Integração Múltipla **261**
11.1 Integral de Riemann . . . 261
11.2 Cálculo da integral múltipla . . . 265
11.3 Duas aplicações . . . 271
11.4 Mudança de coordenadas . . . 273

12 Derivação Espacial **279**
12.1 Curvas . . . 279
12.2 Superfícies . . . 285
12.3 Derivadas parciais . . . 287
12.4 Derivadas direcionais . . . 290
12.5 Derivadas de ordem superior . . . 293

13 Campos Vetoriais **297**
13.1 Campos vetoriais . . . 297
13.2 O operador ∇ . . . 301
13.3 Campos conservativos . . . 306
13.4 Direção e sentido de maior crescimento . . . 311
13.5 Curvas e superfícies de nível . . . 315

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

14 Diferenciação **319**
14.1 Diferenciabilidade 319
14.2 Propriedades e teoremas 327
14.3 Polinômios de Taylor 334

15 Otimização **341**
15.1 Procedimento para duas variáveis 341
15.2 Raciocínios e mais variáveis 347
15.3 Mínimos quadrados 353
15.4 Otimização condicionada 357

16 Integrais Paramétricas e os Teoremas de Stokes **363**
16.1 Integrais de linha 363
16.2 Teoremas da divergência e de Green no plano 367
16.3 Integrais de superfície 367

Anexos **371**

A Quesitos de Matemática Escolar **371**
A.1 Símbolos e alfabetos 371

B Formalismo das Variáveis Aleatórias **375**
B.1 Variáveis aleatórias 375

Notas e soluções **379**

Bibliografia comentada e sugestões **403**

Notas sobre o conteúdo e a organização **407**

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Leia-me!

O mesmo texto dos slides mostrados nas aulas está contido nas molduras ao longo do material.

As pequenas letras emolduradas e sobrescritas indicam respostas ou comentários no fim do livro.

Algumas passagens ou raciocínios específicos precisam ser destacados em relação ao fluxo principal. Identificamos o início dessas intervenções com uma chamada em itálico e seu término com o símbolo □. (Várias delas são rotuladas "extraordinárias" e podem ser omitidas sem prejuízo da compreensão básica do conteúdo, em oposição às demais, que são integrantes da apresentação.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Parte I

Bases

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 1

Funções em Perspectiva

Apresentamos o material básico de Cálculo — as funções — sob a ótica adequada para o trabalho desenvolvido. Já conhecemos do ensino colegial a utilidade das funções em descreverem uma quantidade (chamada "variável dependente") em termos de outra (a "variável independente") como, por exemplo, a posição de um ponto material em função do tempo ou o preço de uma mercadoria em função de seu custo de produção. Aqui, veremos efetivamente o que são funções e como as manipular.

Ao longo deste capítulo, vamos revisar ou aprender muitos novos conceitos. A quantidade de informação a ser absorvida é realmente grande, mas necessária para ser bem usada. Do mesmo modo, o vocabulário de uma língua que aprendemos (inglês, espanhol, francês, mandarim...) consiste de diversas pequenas definições separadas, sendo impraticável formar frases com apenas uma ou duas palavras.

Simultaneamente, conheceremos notações e definições de outras partes da Matemática, como aquelas usadas com conjuntos.

1.1 Primeiros exemplos

Começamos por revisar as principais classes de funções:

Relembre a descrição de uma função:

$$f\colon D \to C,\ f(x) = \text{“expressão”}.$$

f é o nome da função; ela toma um $x \in D$ e calcula um $f(x) \in C$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Alguns textos não usam parênteses, ou seja, tratam o nome f como um simples *operador prefixado* assim: fx.

Às vezes, não se deseja dar nome à função, para evitar abuso de letras ou congestão notacional. Nesse caso, frequentemente se adota a notação

$$x \mapsto \text{“expressão usando } x\text{”},$$

onde se explicita a variável x dentre outras possíveis letras utilizadas.

> Estudaremos principalmente funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ditas *funções reais de uma variável,* ou, mais precisamente, *funções de uma variável real com valores reais.*
>
> De fato, estudaremos $D \to \mathbb{R}$ para alguns $D \subseteq \mathbb{R}$ bem comportados.

> Também estudaremos funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Não se usa a terminologia anterior. Essas funções chamam-se *sequências (reais).*
>
> Dada $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, escrevemos s_n em vez de $s(n)$.

O próximo slide e o comentário seguinte fazem uso das notações de somatória e produto; ei-las explicadas aqui:

A notação $\sum_{i=0}^{n}$ significa “some todos os termos da forma a seguir, cada um obtido para um valor de i de 0 a n”. Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n.$$

Aqui, assumimos que n é um número natural. Se $n = 1$, não aparece o termo quadrático e a soma é apenas $a_0 + a_1 x$. Se $n = 0$, a soma restringe-se ao termo a_0.

Analogamente, $\prod_{j=2}^{5} u_j$ é o mesmo que $u_2 u_3 u_4 u_5$, obtido multiplicando-se os termos indicados.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Funções polinomiais

Dados $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pomos

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Atenção

- Você pode estar acostumado com índices em outra ordem!
- $x \sum_i y_i$ significa $x \times \sum_i y_i = \sum_i x y_i$, não $x + \sum_i y_i$.

(Assim, o sinal $\sum$ aplica-se somente aos termos que o seguem e, na ausência de outro sinal entre ele e um termo antecedente, entende-se multiplicação como é a norma de omissão.)

Aqui, convém você revisar (ou, se não conhecer o assunto, procurar estudá-lo) como se deduz o sinal de um polinômio $p(x)$ dado um valor específico para x, assumindo que p já foi fatorado, isto é, conhecem-se suas raízes $r_1, \ldots, r_n$ e $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - r_i)$. Basta colocar as raízes em ordem crescente e montar uma tabela com todos os intervalos entre elas. Então determina-se o sinal de cada monômio $(x - r_i)$ em cada intervalo e obtém-se o sinal de p por multiplicação. A mesma técnica funciona para as funções racionais que definiremos abaixo.

Quando $p(x) = a_0$, diz-se que p é constante.
Quando $p(x) = a_1 x$, diz-se que p é linear.
Quando $p(x) = a_0 + a_1 x$, diz-se que p é afim.

Muitas vezes, usa-se o adjetivo "linear" em vez de "afim". Além disso, em estudos mais avançados, "afim" adquire outro significado.

Função módulo

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(Veremos várias vezes essa distribuição de casos em uma chave; nesse contexto, trata-se de possibilidades mutuamente excludentes.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fala-se muito que o módulo de um número é "esse número sem sinal" como, por exemplo, $|-3| = 3$. Porém, isso é mau português porque números positivos têm, de fato, um sinal que não se costuma escrever $(+3)$. Além disso, também causa transtornos quando se trabalha com letras: não há como "tirar o sinal" de x quando necessário operar com $|x|$ — veremos exemplos no cálculo de limites — e, nesse momento, a observação do slide é muito útil. Em nosso caso, temos $|-3| = -(-3)$.

Funções exponenciais

(Gráficos na lousa.)

Fixado real $a > 0$, temos

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x.$$

- $a > 1 \Rightarrow f$ estritamente crescente;
- $a = 1 \Rightarrow f$ constante;
- $a < 1 \Rightarrow f$ estritamente decrescente.

(Ainda conversaremos a respeito do significado de "estritamente", mas você concorda sobre crescimento, constância e decrescimento dessas funções?)

Lembre:

- $a^{x+y} = a^x a^y$;
- $a^{x-y} = a^x / a^y$;
- $a^{x^y} \not\equiv (a^x)^y = a^{xy}$.

Discussão extraordinária: Como se define a^x ? Isto é, dados a e x, como calculamos a^x ? Responder essa pergunta é uma motivação do rigor matemático no Cálculo. Quando n é um número natural positivo, colocamos

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ vezes}},$$

ou, mais formalmente — porque não há definição precisa de "três pontinhos" —, procedemos a uma definição recursiva: $a^n = a \times a^{n-1}$. Isso requer um

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

"passo inicial" ou "base da recursão": escolhemos $a^0 = 1$ para que então $a^1 = a$; note que 1 é o elemento neutro da multiplicação e que $a^n = 1 \times a \times \ldots \times a$, onde a ocorre n vezes, *para todo natural n, incluindo o zero.* É importante verificar que essa definição satisfaz as "regrinhas" da exponenciação, mas também importante notar que tal verificação, seja fácil ou não, deve existir por conta própria porque não faz parte da definição.

Para $k \in \mathbb{Z}$, observamos que se $k \geqslant 0$ então já temos a^k; se $k < 0$ então $-k \in \mathbb{N}$ e podemos definir $a^k = 1/(a^{-k})$ fazendo uso da primeira definição. Novamente, devemos verificar as propriedades da exponenciação.

Para $x \in \mathbb{Q}$, digamos $x = p/q$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e sendo $q > 0$, queremos dizer que $a^{p/q} = b \Leftrightarrow a^p = b^q$ e precisamos aprender a tirar raízes (calculamos a^p e pedimos sua raiz q-ésima). Para que a^p tenha uma raiz, vemos que precisamos supor esse número positivo, ou seja, precisamos $a > 0$. Quanto à existência da raiz, é algo garantido pela completude de $\mathbb{R}$, que estudaremos ainda neste curso. Mais uma vez, feito esse trabalho, resta demonstrar as propriedades dessa operação.

Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$, podemos tomar números racionais x_n, um para cada $n \in \mathbb{N}$, arbitrariamente próximos de x e tomar a^x como o limite das potências a^{x_n}. O que é esse limite, se ele existe, se ele é sempre o mesmo, quais são suas propriedades e como elas garantem as propriedades da operação, são todos assuntos que aprenderemos em Cálculo.

Outra possibilidade (que se generaliza melhor) é definir a^x como uma "série de potências", por exemplo, $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$. Como fazer uma soma infinita e quais contas podemos fazer com ela é um assunto típico de Cálculo e Análise. Claramente, precisamos antes definir ln, o que pode ser feito com uma integral.

Assim, essa discussão não é completa por vários motivos: algumas omissões são contas que não fizemos, outras são matérias que ainda cobriremos. □

Padrão é tomar $a = e = 2{,}718\ldots$, número especial do Cálculo. (Veremos motivos.)

Indica-se também $\exp(x) = e^x$, muito útil:

$$\exp(\text{"coisão"}) = e^{\text{"coisão"}}$$

Usando logaritmos (adiante), $a^x = \exp(x \ln a)$ (quem sabe uma, sabe todas!).

(Não confunda a função exp, que é a exponencial com a base específica

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

e, e a função do botão EXP das calculadoras científicas, que insere números em notação científica na base 10.)

Atenção

A mesma operação é usada para definir funções

- potências: x^2, x^3, x^{-1}, etc.
- exponenciais: 2^x, 3^x, $(\frac{1}{2})^x$, etc.
- e mais complicadas: x^x, $(x^2 - 5\,\mathrm{sen}\,x)^{\cos x - 7x^3}$, etc.

Veremos que essas funções têm propriedades e gráficos diferentes!
Regras no Cálculo serão diferentes! porque são funções diferentes!

A seguir, começamos a usar mais notações importantes para conjuntos de números reais. O objetivo delas, é claro, é condensar visualmente o que tomaria muitas palavras descrever; isso é importante também para evitar erros de escrita e leitura.

Uma dessas notações é a de intervalo, que você já deve conhecer.

Outra notação é uma novidade ainda não padronizada: Você deve estar acostumado à notação $\mathbb{R}_+^*$ para o conjunto dos números reais estritamente positivos. Aqui, usaremos a notação $\mathbb{R}^{>0}$ que não é universal, mas é muito mais versátil; por exemplo, $\mathbb{N}^{\leqslant 3} = \{0, 1, 2, 3\}$.

Funções logarítmicas

(Gráficos na lousa.)
Fixado real $a \in]0, 1[\cup]1, \infty[$, temos

$$g\colon \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R},\ g(x) = \log_a x.$$

- $a > 1 \Rightarrow g$ estritamente crescente;
- $a < 1 \Rightarrow g$ estritamente decrescente.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Lembre:

- $\log_a x = u \Leftrightarrow a^u = x$;
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;
- $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$;
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$;
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Na escola, $\log = \log_{10}$.
Em Computação, $\log = \log_2$.
Em Análise, $\log = \log_e = \ln$.
Há quem use lg para uma base de seu interesse.

Funções trigonométricas

(Gráficos na lousa.)
Argumentos sempre em radianos: $\pi = 180°$; cuidado com calculadora!
$\operatorname{sen}, \cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ e

$$\operatorname{tg}\colon \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R},\ \operatorname{tg} x = \tfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Lembre:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$;
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$;
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

Dica

Outras funções trigonométricas: escreva-as usando sen e cos para fazer contas.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assim, você não precisa decorar muitas fórmulas extras, exceto se essas funções especiais (cotangente, secante, cossecante) aparecerem muito em seu trabalho!

Conheça as abreviações dessas funções em inglês, para ler textos técnicos estrangeiros: "sin" é seno, "tan" é tangente, "cot" é cotangente, "sec" é secante e "csc" é cossecante.

Não usaremos, no ciclo básico de Cálculo, as *funções hiperbólicas;* porém, em algumas áreas da Engenharia, elas são bastante importantes e, quando houver necessidade, você se habituará a manipulá-las. Elas podem ser definidas assim: o seno e o cosseno hiperbólicos são

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

respectivamente, enquanto tgh, coth, sech, csch são escritas em termos dessas analogamente à teoria trigonométrica. Assim, todas essas funções podem ser estudadas a partir das propriedades da função exponencial.

Aqui, exercite sua operação algébrica verificando, a partir das duas definições acima usando exponenciais, estas identidades:

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$;
- $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$;
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.

Dica para a soma e a subtração: pode ser mais prático começar pelos membros direitos.

Funções trigonométricas inversas ou "arco"

- $\cos^{-1}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, $\cos^{-1} x = u \Leftrightarrow \cos u = x$, ou seja, $\cos^{-1} x$ é o "ângulo cujo cosseno é x";
- $\operatorname{sen}^{-1}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\operatorname{tg}^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(Gráficos na lousa.)

Também se usa prefixo "arc" em vez de $^{-1}$.

Por exemplo, arccos $= \cos^{-1}$ e diz-se "arco cosseno" ou "cosseno inverso", porque se busca o arco ou ângulo cujo cosseno é um determinado valor.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Atenção

$\operatorname{sen}^{-1} x \not\equiv (\operatorname{sen} x)^{-1}$.

$\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$, de modo que $\operatorname{sen}^2 \not\equiv \operatorname{sen} \circ \operatorname{sen}$. (Veremos $\circ$ futuramente.)

(Cuidado com tradições incompatíveis!)

Atenção

$\cos^{-1} x$ é o *ângulo entre* 0 *e* π cujo cosseno é x.

Veja: $\cos^{-1}\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$.

(Cuidado com domínio e contradomínio!)

1.2 Nomenclatura e propriedades

Geralmente, usamos "regras" para definir funções:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4.$$

Podemos usar regras diferentes para casos diferentes:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x < 0; \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 2e^x & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

Note: domínio totalmente coberto pelos casos!

Uma situação prática em que surge uma função definida por casos é o cálculo do Imposto de Renda:

A título de exemplo, apenas, suponhamos que rendas até R$ 2000 estejam isentas, até R$ 5000 sejam taxadas em 15% e, acima disso, sejam taxadas em 20%. Primeiramente, considere o caso do assalariado que recebia R$ 1900 e estava isento de imposto, mas recebeu um aumento e seu salário passou a R$ 2100. Essa renda é maior que o limite da primeira faixa, mas seria injusto tributá-la totalmente em 15% = R$ 315: o assalariado prefereria não receber o aumento original (e menor) de R$ 200.

Para eliminar esse conflito, o salário é taxado por "pedaços", cada um à alíquota correspondente. Para vermos como se faz, calculamos: quanto de

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

imposto pagará uma renda de R$ 7500 ? Procede-se assim:

$$\begin{aligned} \text{imposto} &= \text{R\$}\,2000 \times 0\% && \text{(os primeiros 2 mil)} \\ &\quad + \text{R\$}\,3000 \times 15\% && \text{(a parte entre 2 e 5 mil)} \\ &\quad + \text{R\$}\,2500 \times 20\% && \text{(a parte acima de 5 mil)} \\ &= \text{R\$}\,0 + \text{R\$}\,450 + \text{R\$}\,500 = \text{R\$}\,950 \end{aligned}$$

Note que o valor obtido não é nem 15% nem 20% dos R$ 7500 originais.

Nos termos acima, a função f que calcula o imposto devido $f(x)$ sobre um salário x é dada assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 2000 \\ \frac{15}{100}(x - 2000) & \text{se } 2000 < x \leqslant 5000 \\ \frac{20}{100}(x - 5000) + 450 & \text{se } x > 5000 \end{cases}$$

Você concorda com a divisão nesses casos e as expressões correspondentes?

Quando falamos de uma função $f\colon D \to C$, *especificamos o domínio D e o contradomínio C.*

Basta que sempre, dado um ponto no domínio (ou seja, um valor específico para a *variável **in**dependente*), possamos computar um *único* valor no contradomínio (a *variável dependente,* assim chamada porque depende da outra).

("Ponto" é sinônimo de "elemento", ou seja, membro de um conjunto.)

Em várias situações do dia-a-dia, incluindo este curso e os próximos, pode-se deixar um ou outro ou ambos domínio e contradomínio subentendidos. Contudo, é sempre salutar inquirir quais são eles. Veja:

Funções racionais:

Suponha que p, q são funções polinomiais. Podemos definir

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = p(x)/q(x)\,?$$

Podemos definir $f\colon D \to \mathbb{R}$ como acima, sendo $D = \{\, x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0 \,\}$.

Restrições: se $S \subseteq D$ então

$$f|_S\colon S \to C,\ f|_S(x) = f(x).$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A função $f\colon D \to C$ determina sua *imagem* $\mathrm{Im}(f) = \{\, f(x) \mid x \in D \,\}$.

Exemplo

Estes contradomínios já são as imagens correspondentes:

$$\operatorname{sen}, \cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1] \text{ e}$$
$$\operatorname{tg}\colon \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \tfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \,\right\} \to \mathbb{R}.$$

Exercício

Para $f\colon D \to C$, $S \subseteq D$ e $R \subseteq C$ definimos:

- a *imagem* $f[S] = \{\, f(x) \mid x \in S \,\}$ e
- a *pré-imagem* $f^{-1}[R] = \{\, x \in D \mid f(x) \in R \,\}$.

Mostre que $f^{-1}[f[S]] \supseteq S$[a] e $f[f^{-1}[R]] \subseteq R$[b].

Construa exemplos em que as inclusões são *próprias,* isto é, não são igualdades.[c]

Em palavras, a imagem por uma função f de um subconjunto S de seu domínio é simplesmente a coleção dos f-valores dos pontos em S, ou seja, substituímos cada elemento em S por seu f-valor para obter $f[S]$. Por exemplo, usando-se a função seno com o conjunto $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ a mero título de ilustração, vem

$$\operatorname{sen}\big[\{0, \tfrac{\pi}{2}, \pi\}\big] = \{\, \operatorname{sen} 0,\ \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2},\ \operatorname{sen} \pi \,\} = \{0, 1\}.$$

Já a pré-imagem por f de um subconjunto R de seu *contra*domínio é a coleção $f^{-1}[R]$ de todos os elementos no domínio cujos f-valores pertençam a R. No caso específico de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, e do conjunto ilustrativo $\{-1, 0, 2\}$, temos

$$f^{-1}\big[\{-1, 0, 2\}\big] = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ tais que } |x| = -1 \text{ ou } |x| = 0 \text{ ou } |x| = 2 \,\} = \\ = \{0, -2, 2\}.$$

Procure exercícios que pedem para determinar imagens e pré-imagens na literatura colegial e de Pré-Cálculo. A questão que propomos no slide é um treino de manipulação de definições de conjuntos feitas arbitrariamente (são quaisquer f, S, R com que devemos lidar).

Como se mostra que dois conjuntos $A \subseteq B$? É preciso fixar um elemento $x \in A$, porém arbitrário, e usar o fato de x ser um elemento de A (satisfazendo alguma propriedade que define precisamente A) para concluir que

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$x \in B$. Desse modo, $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A)\, x \in B$. Agora, para mostrar que os dois conjuntos A, B são iguais, mostramos que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$. Isso requer fazer a demonstração do parágrafo anterior em cada direção. Portanto, $A = B \Leftrightarrow \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

A imagem e a pré-imagem de conjuntos por funções também podem ser chamadas *imagens direta e inversa,* respectivamente, e a notação usada na literatura matemática não é uniforme, encontrando-se ainda f_*, f^* ou $f^{\rightarrow}, f^{\leftarrow}$. Deve-se tomar especial cuidado com autores que escrevem $f(S)$ e $f^{-1}(R)$, ou seja, utilizam parênteses em lugar de colchetes, quando assumem que o contexto deixará claro o que é elemento e o que é subconjunto; é possível mesmo encontrar as formas fS e $f^{-1}R$.

A função $f\colon D \to C$ é chamada:

- *injetora* se cada $f(x)$ é exclusivo para esse x;
- *sobrejetora* se cada $u \in C$ é algum $f(x)$;
- *bijetora* se é injetora e também sobrejetora.

Em outras palavras:

- f é injetora se $(\forall x, y \in D)\, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Veja que outro modo de exprimi-lo é $(\forall x, y \in D)\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f é sobrejetora se $(\forall u \in C)(\exists x \in D)\, f(x) = u$, ou seja, $\mathrm{Im}(f) = C$.
- f é bijetora se a correspondência entre D e C pode ser *invertida,* isto é, dado um $u \in C$ encontraremos sempre algum x (por sobrejeção) de modo que $f(x) = u$ e, além disso, esse x é único (por injeção).

Em inglês, os adjetivos mais usados são *one-one* (injetora), *onto* (sobrejetora) e *one-to-one* (bijetora), mas os galicismos *injective, surjective, bijective* já estão tornando-se conhecidos.

Quando f é bijetora, podemos definir sua *inversa* $f^{-1}\colon C \to D$ assim:

$$f^{-1}(u) = x \text{ tal que } f(x) = u$$

Não é qualquer $g\colon C \to D$ que será inversa de f! Ou seja, não basta uma função fazer o "caminho" inverso da outra para ser sua inversa, assim como não basta duas funções fazerem o mesmo "caminho" para serem iguais.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assuma que f é bijetora e mostre que f^{-1} também é bijetora. Quem é $(f^{-1})^{-1}$?

Exemplo: exponenciais e logaritmos
(Para $0 < a \neq 1$.)
Função a^x é bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{>0}$.
Função $\log_a x$ é bijeção entre $\mathbb{R}^{>0}$ e $\mathbb{R}$.
São inversas uma da outra. (Para o mesmo a!)

Exemplo: trigonométricas e arcos
Notamos que

- cos é injetora sobre $[0, \pi]$;
- sen é injetora sobre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- tg é injetora sobre $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(Ou seja, $\cos|_{[0,\pi]}$ é injetora, etc.)
Então $\cos^{-1}$ é inversa de $\cos|_{[0,\pi]}$, etc.

(A escolha dos contradomínios das funções trigonométricas inversas — ou seja, das restrições dos domínios das trigonométricas originais — depende da aplicação a ser feita dessas funções ou mesmo, em muitos casos, do gosto do autor de cada livro ou manual técnico; convém, portanto, sempre verificar qual é a convenção feita.)

As funções hiperbólicas também têm inversas: são as funções hiperbólicas de "área" ou "argumento", indicadas com prefixos variados começando com a letra "a". Pode-se mostrar que as inversas de senh e cosh são dadas respectivamente por

$$\operatorname{arcsenh} u = \ln\bigl(u + \sqrt{u^2+1}\bigr) \quad \text{e} \quad \operatorname{arccosh} u = \ln\bigl(u + \sqrt{u^2-1}\bigr),$$

sendo que a segunda está definida somente para $u \geqslant 1$.

1.3 Representação gráfica

Evidentemente, já fizemos uso de gráficos nas seções precedentes, mas vamos agora dedicar atenção específica a esses diagramas.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Gráfico na lousa.)
Eixo horizontal das *abscissas* representa domínio D.
Eixo vertical das *ordenadas* representa contradomínio C.
Quando ambos os eixos são $\mathbb{R}$, chamamos o ponto $(0, 0)$ de *origem*.

Para estudar funções como relações, utiliza-se uma representação conjuntista em que D e C são "bolsas" de elementos e $f\colon D \to C$ é uma coleção de flechas de D a C sujeita a certas condições.

Aqui, porém, tratamos da representação cartesiana tradicional. Ela identifica pontos do plano com elementos do produto cartesiano $D \times C = \{\, (x, u) \mid x \in D \text{ e } u \in C \,\}$, assim: um ponto com abscissa x e ordenada u é identificado com o par ordenado (x, u). Nessa representação, usualmente, cada eixo representa uma cópia da reta real $\mathbb{R}$, embora mais geralmente nem D nem C precisem ser um eixo completo.

A bola aberta ou vazada no gráfico indica que a função *não* assume tal valor naquela abscissa. Ou a abscissa não pertence efetivamente ao domínio, ou o valor da função deverá ser marcado com uma bola fechada ou cheia na mesma vertical.

Atenção: Se o eixo das abscissas representa todo o conjunto $\mathbb{R}$, então o gráfico de uma *sequência* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ consiste de pontos no semiplano direito com abscissas equidistantes 1 e *não é uma linha contínua!*

Importante
Suponha algo em termos de outra coisa:

"algo" = função de "coisa"

Sempre temos "coisa" na horizontal (esquerda para direita) e "algo" na vertical (baixo para cima)!
Nunca, jamais inverta essa convenção!

Os eixos podem intersectar-se em qualquer ponto, conforme a conveniência visual do desenho. Isso é comum em gráficos de valores financeiros, por exemplo, onde informações sobre bilhões de reais são mostradas bem próximas da intersecção dos eixos, embora as quantias não sejam próximas de zero. *Contudo, a origem é sempre o ponto* $(0, 0)$.

Uma região do plano (por exemplo, a figura de uma ameba, ou um emaranhado de traços e pontos) corresponde a um subconjunto de $D \times C$ que, por sua vez, é uma *relação* entre D e C. Especificamente de nosso interesse, aqui, é o "gráfico":

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se $f\colon D \to C$ é uma função, então $\{\,(x, f(x)) \mid x \in X\,\}$ é o seu *gráfico.*
(Gráfico na lousa.)

(Desse modo, estudar uma função como sendo uma relação com características especiais é o mesmo que a equiparar ao seu próprio gráfico, que é uma relação.)

Teste das retas verticais:
(Gráficos na lousa.)

Na representação gráfica usando abscissas e ordenadas, o gráfico corresponde a uma função $D \to C$ se toda reta *vertical* passando por um ponto de D encontra o gráfico em um e somente um ponto que tenha ordenada em C.

Teste das retas horizontais para injetividade:
(Precisa ser gráfico de função!) (Gráficos na lousa.)

Teste das retas horizontais para sobrejetividade:
(Precisa ser gráfico de função!) (Gráficos na lousa.)

Esses dois slides dizem que, se já tivermos constatado que o gráfico corresponde a uma função $D \to C$, então ela é:

- injetora se toda reta *horizontal* passando por um ponto de C encontra o gráfico em no máximo um ponto que tenha abscissa em D;
- sobrejetora se toda reta horizontal passando por C encontra o gráfico em algum ponto cuja abscissa está em D.

Desse modo, a função é bijetora se toda reta horizontal passando por um ponto de C encontra o gráfico em um e somente um ponto que tenha abscissa em D. Concluímos que, nesse caso, podemos obter o gráfico da função inversa refletindo o gráfico original ao redor da diagonal principal:

Comportamento dos gráficos de bijetora e sua inversa:
(Gráficos na lousa.)

Detalharemos isso adiante.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

1.4 Translações e dilatações

Suponha fixados $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, para construirmos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
As fórmulas específicas das transformações a seguir variam entre textos.

Translação horizontal:
(Gráfico na lousa.) $g(x) = f(x + k)$.

Veja que k é somado *dentro* da função. Cuidado com o sinal de k! O que acontece se $k = 0$?

É importante confirmar se o gráfico de g que desenharmos corresponde à função que definimos. Isso pode ser feito calculando explicitamente o valor de $g(x)$ para algum x, por exemplo $x = 0$ para o qual $g(0) = f(k)$, e conferí-lo no gráfico.

Translação vertical:
(Gráfico na lousa.) $g(x) = f(x) + k$.

As mesmas observações aplicam-se a este caso, mas k é somado *fora*.

Dilatação horizonal:
(Gráficos na lousa.) $g(x) = f(kx)$.

Aqui, para verificar o gráfico, não podemos tomar $x = 0$, para o qual sempre $g(0) = f(0)$ independentemente do valor de k. Porém, podemos utilizar um valor não-nulo como $x = 1$. Observe que k está dentro da função.

Note que, quando $k = 0$, a função g torna-se constante; por quê, e com qual valor? Note também que, se $k < 0$, há uma rotação do gráfico ao redor do eixo das ordenadas. Finalmente, dependendo da magnitude de k, ou seja, se $0 < |k| < 1$ ou $|k| = 1$ ou $|k| > 1$, podemos ter uma dilatação no sentido próprio da palavra ou uma contração. De qualquer modo, o comportamento é aquele de uma sanfona ao longo do eixo das abscissas, enquanto o eixo das ordenadas mantém-se inalterado.

Vemos um exemplo de dilatação horizontal ao escrever uma exponencial a^x em termos da base específica e: temos $a^x = \exp((\ln a) \cdot x)$, ou reciprocamente $e^x = a^{x \log_a e}$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Dilatação vertical:
(Gráficos na lousa.) $g(x) = kf(x)$.

Agora k está fora da função. Novamente, as observações acima têm validade aqui, embora seja o eixo das abscissas que se matenha inalterado e talvez funcione como eixo de rotação. O teste do desenho pode ser feito com valores de x tais que $f(x) \neq 0$.

Exercício
Monte tabelas descrevendo em palavras o comportamento do gráfico de g em termos do sinal de k e, no caso de dilatações, de sua magnitude.

Apresentamos a resposta imediatamente aqui, mas convém fazer suas próprias tabelas, para depois compará-las com estas!

Para $g(x) = f(x + k)$:

valor de k	gráfico novo ... do original
positivo	para a esquerda
nulo	nada muda
negativo	para a direita

Para $g(x) = f(kx)$:

valor de k	gráfico novo ... do original
maior que 1	comprimido horizontalmente
igual a 1	nada muda
entre 0 e 1	espichado horizontalmente
igual a 0	reta horizontal com ordenada $f(0)$
entre -1 e 0	refletido esq.-dir. e espichado horiz.
igual a -1	refletido esquerda-direita
menor que -1	refletido esq.-dir. e comprimido horiz.

Para $g(x) = f(x) + k$:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

valor de k	gráfico novo ... do original
positivo	para acima
nulo	nada muda
negativo	para abaixo

Para $g(x) = kf(x)$:

valor de k	gráfico novo ... do original
maior que 1	espichado verticalmente
igual a 1	nada muda
entre 0 e 1	comprimido horizontalmente
igual a 0	reta horizontal com ordenada 0
entre -1 e 0	refletido cima-baixo e comprimido vertic.
igual a -1	refletido cima-baixo
menor que -1	refletido cima-baixo e espichado vertic.

Exercício

Pense no que acontece quando essas operações são repetidas, por exemplo, uma translação horizontal seguida de uma dilatação vertical, depois uma translação vertical.

- Observe que o total de combinações se resume a umas poucas possibilidades.
- Qual é o comportamento geral dos pontos do gráfico submetidos a essas transformações?

(Não é preciso formalizar nada; somente jogue um pouco com as transformações.)

Para responder essas questões, primeiramente, observamos que repetir translações equivale a efetuar uma única translação e, analogamente, dilatações repetidas equivalem a uma única dilatação. Agora, se fizermos antes uma dilatação $y = ax$ e depois uma translação $z = y + b$, temos como resultado líquido a transformação $z = ax + b$, que é uma "função afim"

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

como definimos na pág. 5. Por outro lado, se fizermos antes a translação $y = x + p$ e depois a dilatação $z = qy$, obtemos também uma função afim: $z = q(x + p) = qx + [qp]$.

Evidentemente, se usarmos os mesmos valores, veremos que não podemos "trocar a ordem" (ou *comutar*) impunemente, porque

$$(ax) + b = ax + b \not\equiv ax + ab = a(x + b).$$

Contudo, embora as funções afins não sejam idênticas, elas têm a mesma forma, isto é, ambas as ordens resultam em uma transformação afim, mudando-se apenas os valores de seus parâmetros.

Assim, qualquer seqüência de translações e dilatações que efetuarmos no argumento da função f (operações horizontais) será simplesmente uma transformação afim. Também qualquer combinação de translações e dilatações efetuadas com os valores de f (operações verticais) terá o mesmo efeito de uma transformação afim. Em resumo, a expressão final será

$$A[f(ax + b)] + B$$

e o gráfico dessa função de x será transladado (vetorialmente) em relação ao de f e dilatado (ou contraído) em cada direção, horizontal ou vertical, independentemente.

O conceito de composição, que estudaremos em breve, permite-nos formular essas conclusões de modo mais sucinto: a composição de translações e dilatações da reta real, em número finito, resume-se a uma transformação afim; todas as combinações podem ser descritas como a composição de uma função afim, seguida da função dada, seguida de outra função afim.

1.5 Simetrias, monotonias e limitações

Conheceremos, aqui, mais algumas propriedades que uma função pode ter, ou não. Esta seção agrupa propriedades que, embora possam ser definidas algebricamente, têm fortíssima interpretação visual no gráfico de uma função.

Continuaremos trabalhando com a notação convencionada $f\colon D \to C$, isto é, chamamos D o domínio e C o contradomínio, que suporemos ambos contidos em $\mathbb{R}$. Em se tratando de simetrias, trabalharemos com $D = \mathbb{R}$. Fazemos isso somente porque necessitamos parte da estrutura algébrica de $\mathbb{R}$ — mais precisamente, a habilidade de tomar opostos $(-x)$ e ordenar números — que não pode não existir em conjuntos arbitrários.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Função par

(Gráfico na lousa.)
Gráfico simétrico em torno do eixo das ordenadas.
$(\forall x \in \mathbb{R})\, f(-x) = f(x)$.

Por exemplo, x^2 ou x^{14} definem funções pares. Use esses exemplos para associar o nome à propriedade. Mas outras funções também são pares, como veremos em um exercício!

Função ímpar

(Gráfico na lousa.)
Gráfico simétrico em torno da origem.
$(\forall x \in \mathbb{R})\, f(-x) = -f(x)$.

Exercício

Mostre que, então, $f(0) = 0$.[a]

Atenção: A simetria é em torno da origem (um ponto), não em torno de uma reta; portanto, não é uma reflexão especular. Exemplos são x^5 e x^9, mas não estão limitados a esses!

Definimos funções ímpares com domínio todo $\mathbb{R}$; o resultado do exercício (e alguns outros resultados em Cálculo) somente valem sob tal condição. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ merece ser chamada ímpar, mas certamente $f(0) \neq 0$ porque, de fato, sequer está definido.

Exercício

Determine se a função definida por cada expressão é par ou ímpar:

- $\operatorname{sen} x$;[b] $\cos x$;[c] $\operatorname{tg} x$;[d]
- $\operatorname{sen}^{-1} x$;[e] $\cos^{-1} x$;[f] $\operatorname{tg}^{-1} x$;[g]
- $x \cos x$;[h] $x + \operatorname{sen} x$;[i] $x^2 + \operatorname{tg} x$;[j]
- $3^x + 3^{-x}$;[k] $2^x - 2^{-x}$;[l] $\log_5 |x|$.[m]

Função periódica

(Gráfico na lousa.)
$(\exists T \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x + T) = f(x)$.
O menor $T > 0$, se existir, é chamado *período.*

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Note que toda função constante é periódica, mas não tem um período!

Exemplos

sen e cos têm período 2π; tg tem período π.
$\operatorname{sen}^{-1}, \cos^{-1}, \operatorname{tg}^{-1}$ não são periódicas.

Observe que a propriedade vale para qualquer x. Portanto, pondo $x+T$ no lugar de x, obtemos

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$$

e, do mesmo modo,

$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = \ldots = f(x).$$

Agora, coloquemos $x-T$ no lugar de x. Então $f((x-T)+T) = f(x-T)$ pela propriedade; logo, $f(x) = f(x-T)$. Iterando esse processo, concluímos que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z})\, f(x+nT) = f(x).$$

Agora, finalmente explicitamos precisamente a terminologia que já utilizamos quando visitamos as funções exponenciais e logarítmicas pela primeira vez:

Monotonias

A função $f\colon D \to C$ é chamada:

- *crescente* se $(\forall x, y \in D)\, y \geqslant x \Rightarrow f(y) \geqslant f(x)$;
- *decrescente* se $(\forall x, y \in D)\, y \geqslant x \Rightarrow f(y) \leqslant f(x)$;
- *estritamente crescente* se $(\forall x, y \in D)\, y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$;
- *estritamente decrescente* se $(\forall x, y \in D)\, y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$.

Note que funções constantes são crescentes e decrescentes; aliás, uma função (de)crescente pode ser constante em todo de um ou mais patamares de seu domínio e, portanto, não precisa ser injetora.

Contudo, nos casos estritos, ambos os dois sinais de desigualdade devem ser estritos: o segundo, porque queremos a definição "estrita"; o primeiro é forçado pelo segundo (se $x = y$, sabemos que a função f deve satisfazer $f(x) = f(y)$).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Desse modo, uma função estritamente crescente ou decrescente é sempre injetora.

Em qualquer dos quatro casos, diz-se que a função é "monótona" ou "monotônica", de acordo com o próprio sentido do primeiro adjetivo. Desenhe gráficos representativos de cada um desses casos.

Função limitada

$(\exists K, M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\, K \leqslant f(x) \leqslant M$, ou seja, $\mathrm{Im}(f)$ contida em intervalo limitado.

O que é ser limitada superiormente? Inferiormente?

Então $K \leqslant M$. O objetivo é detectar um "piso" e um "teto" para o gráfico da função, sendo que as "laterais" são delimitadas pelo próprio domínio D. Tanto faz se o piso ou o teto são "tocados" pelo gráfico da função: se você precisar trabalhar com desigualdades estritas, substitua K, M por $K-1, M+1$ respectivamente.

No caso de limitações superior (M) ou inferior (K), só nos preocupamos com o teto ou o piso, respectivamente, podendo o outro existir ou não.

Experimente exemplificar essas situações com gráficos!

Exemplos

(Para $0 < a \neq 1$.)

Função a^x é ilimitada superiormente, mas limitada inferiormente e o "melhor" limitante inferior (piso) é 0: 0 é piso, mas nenhum nº positivo é.

$\log_a x$ não é limitada (nem inf. nem sup.)

sen e cos são limitadas; tg é ilimitada.

$\mathrm{sen}^{-1}, \cos^{-1}, \mathrm{tg}^{-1}$ são limitadas.

1.6 Novas funções

Esta seção introduz algumas funções que não fazem parte do dia-a-dia escolar, mas que, exatamente por serem funções, merecem ter destaque. Elas são definidas usando-se "regras" e "casos" como discutimos nas primeiras seções do capítulo, embora o modo de fazê-lo seja progressivamente heterodoxo. Ao constatar isso, desejamos ter motivado a seção subsequente.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Funções característica ou indicadoras

Sendo $P \subseteq D$, definimos

$$\chi_P \colon D \to \{0,1\},\ \chi_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in P, \\ 0 & \text{se } x \notin P. \end{cases}$$

Outra notação que pode ser encontrada para χ_P é 1_P.

Exercício

Assuma $P, Q \subseteq D$. Descreva $\chi_{P\cap Q}$ e $\chi_{P\cup Q}$ em termos de somente χ_P e χ_Q.[a]

O que precisamos sobre P e Q para considerar $\chi_{P\times Q}$? Descreva-a em termos de χ_P e χ_Q.[b]

Você pode também pensar sobre $\chi_{P\smallsetminus Q}$ e $\chi_{P\triangle Q}$.[c]

Funções escada ou de patamares

Se $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$, onde os D_i são dois a dois disjuntos, e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, podemos tomar $f \colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_i$ quando $x \in D_i$.

Por que f se chama escada, ou também, de patamares?

O que acontece se os D_i não são disjuntos? E se não cobrirem todo o D?

A primeira pergunta tem uma resposta clara se pensarmos em termos de representações gráficas! Essa resposta também nos lembra de que, para vários autores, os domínios D_i dos patamares devem ser intervalos ou uniões de número finito de intervalos.

Quanto à segunda pergunta, essa é uma definição de função usando uma "regra" e precisamos sempre que tal "regra" produza um único valor da função para cada valor do argumento. Aqui, portanto, temos que verificar o que dá certo e o que dá errado.

Quando estudarmos operações entre funções, poderemos propor uma solução: tomamos $f = a_1\chi_{D_1} + \ldots + a_n\chi_{D_n}$. Note que esse é um modo de generalizar a definição original, que assume que D está *particionado* em $D_1, \ldots, D_n$. Essa função também é uma função escada? (Verifique que sim.)

As próximas duas funções devem mesmo ser novidade, do ponto de vista do Ensino Médio. Elas são chamadas *patológicas,* ou doentias, em vista de seu comportamento assaz diferente daquele de funções com que estamos habituados.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Característica dos racionais (Dirichlet)

$$\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ (racional, quociente)}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ (irracional)}. \end{cases}$$

Gráfico difícil. (Tentativa na lousa.)

Veremos que é descontínua em todo ponto.

Função de Thomae

$$f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x = m/n \text{ reduzido}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Gráfico difícil. (Tentativa na lousa.)

Veremos que é contínua somente nos irracionais.

(Por uma fração m/n ser *reduzida,* queremos dizer $n > 0$ e $\text{mdc}\{m, n\} = 1$, isto é, m e n são relativamente primos.)

1.7 Intuição *versus* definição

Pensamos em $f\colon D \to C$ como uma "regra" que associa a cada elemento de D um elemento de C.

Mas isso é problemático: O que é essa "regra"? Que tipos de regras podemos usar para descrever funções?

Então vamos trabalhar com uma definição precisa:

Uma *função* $f\colon D \to C$ é qualquer relação entre pontos de D e pontos de C tal que todo $x \in D$ relaciona-se com um único $y \in C$.

Escrevemos $f(x) = y$.

Portanto, a associação $f(x) = y$ não precisa ser descrita com fórmulas ou palavras!

Dado x, o correspondente y é único. Nem todo y precisa ser relacionado a um x e, também, não é preciso ser o mesmo y para todos os x. Mas é preciso que não haja nenhum x sem um y correspondente.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Reescreva o parágrafo anterior indicando que o y correspondente a x depende desse x; afinal, $y = f(x)$. Use esta notação: y_x.

Para o próximo exercício, é melhor dar nomes às quantidades, mas ainda assim trabalhar com elas de modo abstrato: então, suponha que D, C tenham p, q elementos, respectivamente.

Exercício

Considere o conjunto C^D de todas as funções $D \to C$. Suponha que D e C são finitos: quantos elementos tem C^D? (Pense também: Você listará "regras" ou contará *todas* as funções?)[a]

Já para o exercício a seguir, lembre que funções são *todas* as relações com a propriedade indicada. É preciso estar claro (se não estiver, pergunte!) o que é uma relação entre D e C — é um subconjunto do produto $D \times C = \{\, (x, y) \mid x \in D \text{ e } y \in C \,\}$ — e que existe a relação vazia.

Exercício

Descreva as funções $D \to C$ (ou seja, determine o conjunto C^D) para cada D, C abaixo:

- C unitário;[b]
- D unitário;[c]
- $D = \emptyset$;[d]
- $C = \emptyset$ — como deve ser D para existir uma função?[e]

1.8 Operações e comparações entre funções

Esta seção define operações entre funções com mesmo domínio e contradomínios contidos em $\mathbb{R}$, ou em outro conjunto onde saibamos somar, multiplicar e comparar. Haverá outra operação entre funções, a composição, que requer funções com natureza diferente e que estudaremos na próxima seção.

Antes de mais nada, é preciso pensar sobre o que se espera de uma operação entre funções: dadas essas operandas, desejamos definir uma outra função em termos delas; para concretizar essa definição, devemos especificar

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

como calcular o valor dessa função em cada elemento de seu domínio. Dentre as várias possibilidades para essa especificação usando as operandas, o seguinte slide usa um modo muito particular:

> Suponha $f, g\colon D \to \mathbb{R}$. Definem-se ponto a ponto:
>
> - $f + g\colon D \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
> - $fg\colon D \to \mathbb{R}$, $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
>
> (Discussão em aula sobre o "ponto a ponto".)

Assim, fixa-se $x \in D$ e faz-se a operação correspondente com os valores das funções calculadas em x; seus valores em outros pontos não importam. Esse método para definir operações é chamado "ponto a ponto" e é muito comum em Matemática. Você já deve conhecê-lo da soma de vetores: Somamos a primeira coordenada de cada vetor e o resultado é a primeira coordenada do novo vetor. Depois somamos as segundas coordenadas, as terceiras, etc. e listamos os resultados respectivamente. Tal soma é feita, portanto, "coordenada a coordenada". Operamos com sequências, cujo domínio é $\mathbb{N}$, exatamente do mesmo modo.

Mais três exemplos: A diferença $f - g$ é definida como acima, substituindo-se $+$ por $-$. Se também $k \in \mathbb{R}$, então a função kf é definida como $(kf)(x) = k \cdot f(x)$. Se $g(x) \neq 0$ para qualquer $x \in X$, então podemos definir f/g também ponto a ponto.

> O que significa $f = g$?
>
> $$\begin{aligned} f = g &\Leftrightarrow f \text{ e } g \text{ são a mesma relação} && \text{(por definição)} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in D)\, f(x) = g(x) && \text{(ponto a ponto!)} \end{aligned}$$
>
> Quando temos $f \neq g$?
>
> $$f \neq g \Leftrightarrow (\exists x \in D)\, f(x) \neq g(x) \quad (\textbf{não} \text{ é ponto a ponto!})$$
>
> Também ponto a ponto:
>
> $$f \leqslant g \Leftrightarrow (\forall x \in D)\, f(x) \leqslant g(x)$$
> $$f < g \Leftrightarrow (\forall x \in D)\, f(x) < g(x)$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Atente para como é feita a negação de uma propriedade do tipo "para todo" ou "existe". Em vista disso, como propriedades "ponto a ponto" são do tipo "para todo", então suas negações não o podem ser!)

Comparar funções será importante em diversos teoremas sobre convergência e limites, tanto inicialmente como depois, em integração.

Veja que, para compararmos duas funções, *elas devem ter mesmos domínio e contradomínio,* caso contrário sequer se começa a discussão. Contudo, duas funções $f, g\colon D \to C$ são *apenas* "paralelas" e, para serem iguais, é preciso fazer a comparação ponto a ponto! Para duas funções *diferirem,* basta que tenham valores distintos em um algum ponto do domínio.

Quando se trata de comparar números reais, a ordem é *linear,* ou seja, tomados dois números, um deles sempre vem antes ou depois do outro. Porém, é possível duas funções não serem uma maior ou menor que a outra. (Gráfico na lousa.)

Composição de funções

Suponha $f\colon D \to C$ e $g\colon E \to D$. Note o mesmo D:

$$E \xrightarrow{g} D \xrightarrow{f} C$$

(Cuidado com a ordem!)

Definimos

$$f \circ g\colon E \to C,\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O objetivo da composição é substituir por uma única função o trabalho feito primeiro por g e depois por f. Isso é possível porque o contradomínio de g é o domínio de f, ou seja, f está definida em todos os valores assumidos por g. A composição será um artifício muito útil nos cálculos de limites e de derivadas, usando-se, para estas, o que chamaremos de "Regra da Cadeia".

Não confunda o símbolo $\circ$ (lê-se "bola") com a multiplicação de funções. Note também que a ordem é extremamente importante: Podemos definir $g \circ f$, acima, somente se $C \subseteq E$ e ela não será a mesma $f \circ g$. A função que vem primeiro g aparece *à direita* da outra f para que as notações $f \circ g$ e $f(g(x))$ sejam compatíveis.

Quando todos os domínios e contradomínios envolvidos são $\mathbb{R}$, é claro, podemos compor as funções em qualquer ordem. Por exemplo, se $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$ então

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = (\cos x)^3 = \cos^3 x,$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \cos(x^3).$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Note que as duas compostas são diferentes!) Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$, quais são as duas compostas $f \circ g$ e $g \circ f$?[a]

Pode-se mostrar que a composição de funções polinomiais é novamente polinomial. O mesmo vale para funções racionais, com a devida restrição de domínios: a composta estará definida em todo o $\mathbb{R}$ exceto em um número finito de pontos.

Estes dois exercícios são muito importantes, tanto por seus enunciados como pela prática que oferecem:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Suponha que $f\colon D \to C$ é bijetora. Podemos formar $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$? Determine-as.[a]

Exercício

Suponha dadas $f\colon D \to C$ e $g\colon C \to D$ e assuma que $(f \circ g)(u) = u$ para todo $u \in C$, que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in D$. Mostre que f é injetora e sobrejetora; prove que $g = f^{-1}$.[b]

No caso desse exercício, diz-se que $g \circ f$ e $f \circ g$ são funções *identidade.* Existem exemplos de $g \circ f$ ou $f \circ g$ ser identidade, *mas f não ser sobrejetora ou injetora,* respectivamente. Você consegue construí-los?[c]

Para ir além: Nosso primeiro capítulo termina aqui. Nosso principal objetivo foi, ao revisar as funções que já conhecemos, apreciá-las no modo mais abstrato da Matemática formal, comparando-as com outras funções que são cotidianamente incomus. Para quem quiser mais, sugerimos nosso apêndice "Formalismo das Variáveis Aleatórias" que, com os conceitos básicos de Probabilidade e Estatística, exemplifica o tratamento de funções como elementos de conjunto ou como variáveis de novas funções. Este anexo também faz mais algumas manipulações de conjuntos como entes abstratos.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 2

A Estrutura dos Números Reais

Continuaremos, neste capítulo, a conhecer conceitos matemáticos sob um novo prisma, enquanto exercitamos nossas habilidades matemáticas em manipular diversos objetos, necessárias para o uso do Cálculo, e aprendemos novas notações e raciocínios.

Aqui, o ente matemático sob estudo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, ou "reta real", com sua estrutura usual, ou seja, as operações de soma e produto, os números importantes 0 e 1 e a relação de ordem; também consideraremos os outros conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Em vez de simplesmente descartar nosso conhecimento pré-universitário sobre $\mathbb{R}$ e construir um novo corpo de informações, selecionaremos umas poucas propriedades que nos pareçam mais úteis ou importantes e, *com atenção mais cuidada,* verificaremos que os outros fatos que conhecemos são de fato conseqüência delas.

Outra luz que dedicaremos a $\mathbb{R}$ enfocará certos subconjuntos seus, cujas características especiais permitirão alguns raciocínios importantes em Cálculo.

2.1 Axiomas de corpo ordenado

Propriedades dos números reais:
O que é verdade?
Por que é verdade?

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Selecionaremos algumas propriedades *fundamentais,* a partir das quais as demais deverão ser demonstradas.

Cada uma delas é chamadas *axioma.*

Demonstrações devem usar somente axiomas ou outras propriedades já provadas e consistir de um número finito e fixo de passos.

Esses axiomas não serão escolhidos ao acaso: serão aquelas propriedades que já sabemos que nos permitem fazer contas com a máxima facilidade, seja com números ou letras: Permutar os operandos entre si, distribuir a multiplicação em parênteses, ...

O conceito de *prova formal* tem passado por aperfeiçoamentos desde sua introdução pelos gregos, mas conserva a mesma essência: (1) A prova deve ser finita porque se deseja apresentá-la em um texto concreto. (2) É preciso partir dos axiomas, ou seja, alguma coisa deve ser "assumida" porque, caso contrário, não teríamos por onde começar e as demonstrações teriam que recuar infinitamente. (3) Porém, não há problema em utilizar um fato já demonstrado, porque sua própria demonstração finita pode ser incorporada à prova em que se trabalha, sem alterar o caráter finitário desta. (4) Também não há problema em verificar, no mesmo estilo finitário, que uma hipótese contraria os axiomas ou os fatos já demonstrados, para então concluir pela negação dessa hipótese.

Nosso objetivo, neste assunto, não é nos massacrarmos com preciosismos demonstrando absolutamente tudo, mas apenas entender como esse conceito funciona e perceber que um número bem reduzido de axiomas já bastará para demonstrar muitas propriedades e, assim, descrever a reta real.

Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$:

Associatividade $(x+y)+z = x+(y+z)$ e $(xy)z = x(yz)$.

Comutatividade $x+y = y+x$ e $xy = yx$.

Distributividade $x(y+z) = xy+xz$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Elementos neutros Existem $0, 1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x,\ x1 = x,\ 0 \neq 1.$$

Oposto e inverso

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\, x + (-x) = 0$;
- $(\forall x \neq 0)(\exists (x^{-1}) \in \mathbb{R})\, xx^{-1} = 1$.

Note que $-x$ e x^{-1} são notações apenas e, a esta altura, não têm qualquer significado. Assim, podemos utilizar outras decorações comuns em Matemática para indicar os mesmos objetos: para cada número real x, existem outros dois números $\widehat{x}$ e $\widetilde{x}$ tais que $x + \widehat{x} = 0$ e $x \times \widetilde{x} = 1$.

Os axiomas listados até aqui, quando agrupados, tomam o nome coletivo de "axiomas dos corpos". Assim, $\mathbb{R}$ é um *corpo,* porque tem essas propriedades, e também são corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ (o conjunto dos números complexos). Em Álgebra acadêmica, vê-se que existem ainda muitos outros corpos.

Por isso, devemos notar a importância deste fato: *Onde quer que os axiomas valham, suas consequências valerão também.* Ele significa que, se fizermos apenas os cálculos permitidos pelos axiomas ou outras propriedades que deduzirmos deles, então esses cálculos já servem para qualquer corpo.

Desse modo, foi importante impor que $0 \neq 1$, porque esse fato não decorre dos outros. De fato, todos os outros axiomas valem para o conjunto unitário $\{0\}$, como você pode verificar! Vejamos mais exemplos:

Consequências (para reais arbitrários e não-nulos se necessário):

- $0 + x = x$, $1x = x$, $(-x) + x = 0$, $x^{-1}x = 1$, etc.
- Podemos definir $x - y = x + (-y)$ e $x/y = xy^{-1}$.
- $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ (cancelamento) porque somamos $-x$ aos dois lados, associamos e simplificamos, somando zeros.
- $xy = xz \Rightarrow x = 0$ ou $y = z$ (cancelamento) porque se $x \neq 0$ então multiplicamos x^{-1} aos dois lados, etc.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos mais elaborados:

- $x0 = 0$ porque $0 + 0 = 0$, donde $x0 + x0 = x(0 + 0) = x0$ e cancelamos.
- $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ porque escrevemos $xy = x0$ e cancelamos.
- $-x = (-1)x$ porque $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0 = x + (-x)$ e cancelamos.

Aprecie que essas deduções, embora resultem em resultados óbvios, são necessárias se queremos fundamentar todas as propriedades em apenas alguns axiomas. Por exemplo, no último exemplo acima, comparamos o oposto (aditivo) de x com o produto de x pelo oposto do número 1 que, por si próprio, é elemento neutro da multiplicação e não tem relação alguma com a adição. Com a notação que comentamos anteriormente, escreve-se $\widehat{x} = \widehat{1}x$.

Temos utilizado algumas consequências, como as leis do cancelamento, para deduzir outras. Propusemos, no início, que isso é perfeitamente aceitável e todas as novas propriedades são consequências dos mesmos axiomas originais. Contudo, somente é válido quando estamos certos de dois fatores: (1) estão corretas as deduções das novas propriedades utilizadas, não comprometendo a corretude das próximas demonstrações; (2) não formamos um círculo vicioso, ou seja, não utilizamos A para mostrar B havendo, antes, assumido B para mostrar A. Neste caso, teríamos apenas mostrado que A e B equivalem, mas não sua validade. Em outras palavras, somente podemos proceder por "camadas".

Exercício

Para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários, mostre que

- $-(-x) = x$;[a]
- $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$;[b]
- $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ou $x = -y$;[c]
- $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ e $(-x)(-y) = xy$.[d]

Note: não há um procedimento fixo.

Como fazer esses exercícios? Tanto neste caso, como em demonstrações pedidas em vários exercícios, não existe uma receita de bolo de como co-

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

meçar ou executar a prova, de modo que é importante praticar bastante e variadamente. Contudo, tenha claro o que está sendo pedido: o enunciado quer que se mostre uma propriedade, de modo que ela deve aparecer *ao fim* dos cálculos, não no começo onde utilizamos as hipóteses.

Nos dois primeiros itens, tenha cuidado para não usar fatos sobre o sinal $-$ e a potência $^{-1}$ que, embora verdadeiros, ainda não demonstramos; lembre-se de que poderiam ser $\widehat{\cdot}$ e $\widetilde{\cdot}$. Que tal dar um nome diferente para evitar confusão? Escreva $y = -x$ ou $z = x^{-1}$.

Aqui estão exercícios adicionais para você praticar:

- Os elementos neutros 0 e 1 são únicos com suas respectivas propriedades, isto é, se $x + a = x$ (resp., $xb = x$) para todo x, então $a = 0$ (resp., $b = 1$);[a]
- Oposto e inverso são únicos:[b]

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x,$$
$$xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1};$$

- $-(x + y) = (-x) + (-y)$ e também $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$;[c]
- $x^{-1} = 1/x$ e também $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$;[d]
- $(x/y) + (a/b) = (xb + ya)/(yb)$ e também $= (xa)/(yb)$.[e]

Agora, deveremos listar mais axiomas:

Ordem linear (ou total) Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$;
- $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$ (exclusivamente);
- $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;
- $x < y$ e $z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

A primeira propriedade da ordem diz que ela é *transitiva,* então não há "voltas" na orientação da reta real. A segunda é a razão para os nomes *linear* e *total,* porque todos os elementos podem ser comparados.

A título de curiosidade, note que a adição e a multiplicação são duas funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e que as relações de desigualdade $<$ e $\leqslant$ são, cada uma, entre $\mathbb{R}$ e ele próprio. Por exemplo, a terceira propriedade acima determina que a adição é estritamente crescente com respeito ao somando esquerdo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ têm essas propriedades. Veremos posteriormente no que diferem (Axioma do Supremo).

Assim, os racionais e os reais formam duas estruturas chamadas *corpos totalmente ordenados.* Existem outras estruturas assim, de extrema importância para a Matemática. Podemos agora deduzir propriedades que valerão em $\mathbb{R}$, em $\mathbb{Q}$ e em todas essas estruturas, mesmo que não as conheçamos ainda.

Consequências da ordem total:

- $x < y$ e $a < b \Rightarrow x + a < y + b$ porque $x + a < x + b < y + b$.
- $0 < x < y$ e $0 < a < b \Rightarrow 0 < xa < yb$ porque $x0 < xa < xb < yb$.
- $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ porque, se não, $-x \geqslant 0$ e então $0 = x + (-x) > 0 + 0 = 0$, absurdo. Analogamente, $x < 0 \Rightarrow -x > 0$.
- $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ por dois casos: se $x > 0$ então $xx > 00$; se $x < 0$ então $-x > 0$ e usamos caso anterior com $x^2 = (-x)(-x)$.

Exercício

Mostre que

- $0 < 1$;[a]
- para $x, y \neq 0$, temos $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$.[b]

Exercício

É possível $\mathbb{C}$ ser corpo ordenado?[c]

Agora, você já deve estar convencido de que todas as regras operacionais para números reais que você conheceu na escola podem ser deduzidas dos axiomas apresentados. Isso é verdade, mas é mais importante perceber que a lista dessas regras é bem grande e cada uma delas deve ser igualmente verificada.

Discussão extraordinária: Consideremos a construção dos conjuntos numéricos, que na escola são apresentados prontos. Não daremos todos os detalhes aqui, mas enfatizamos que, para verificarmos aqueles axiomas (comutatividade, associatividade, ...), os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ têm que ser construídos

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

de alguma forma. Afinal, a pergunta científica que se coloca é: existem esses conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ com operações realmente satisfazendo essas propriedades?

A construção de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ poderá ser feita depois que conhecermos o Axioma do Supremo. É possível mostrar também que qualquer outra construção (que também satisfaça todas essas propriedades, incluindo o Axioma do Supremo) levará ao mesmo conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, as propriedades descritas bastam para que todos falemos do mesmo $\mathbb{R}$.

Construir $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$ é bem simples e costuma-se fazê-lo em cursos de Álgebra. Basta tomar $\mathbb{R}^2$ com a soma usual de vetores e o produto $(a,b)(x,y) = (ax - by, ay + bx)$. Então $(0,0)$ corresponde a 0 e $(1,0)$ corresponde a 1; costuma-se escrever $i = (0,1)$. É preciso mostrar que essas operações têm as propriedades requeridas; porém, já sabemos que $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado como corpo.

Intuitivamente, os elementos de $\mathbb{Q}$ são as frações de números em $\mathbb{Z}$. Mas o que é uma fração? Para construí-las, formamos o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\neq 0}$ e consideramos a relação $\sim$ definida assim: $(x,y) \sim (a,b) \Leftrightarrow xb = ya$. (Podemos mostrar que $\sim$ é uma "relação de equivalência".) Dados $x, y \in \mathbb{Z}$ com $y \neq 0$, diremos que uma fração x/y consiste de todos os pares $(a,b) \sim (x,y)$. Então precisamos definir adição e multiplicação de frações; por exemplo, $(x/y) + (a/b)$ será a fração que contém o par $(xb + ya, yb)$.

Um processo semelhante deve ser utilizado para construir $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$: em vez de frações, definiremos diferenças. Contudo, vemos que o conjunto

$$\underbrace{\{0,1,2,3,\ldots\}}_{\mathbb{N}} \cup \underbrace{\{-1,-2,-3,\ldots\}}_{-\mathbb{N}^{>0}}$$

já é *fechado sob adição e multiplicação*, isto é, já contém todas as somas e os produtos de seus elementos. Desse modo, ele já é todo o $\mathbb{Z}$. Em outras palavras, para construir $\mathbb{Z}$ basta acrescentar os opostos de $\mathbb{N}$, mas para construir $\mathbb{Q}$ não foi suficiente acrescentar inversos a $\mathbb{Z}$.

O conjunto $\mathbb{N}$ é construído, como origem de tudo, em uma área específica da Matemática avançada chamada Teoria dos Conjuntos. Por outro lado, podemos conceber que temos a reta real dada (através, por exemplo, de axiomas geométricos) e que desejamos identificar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dentro dela. Bastará definir $\mathbb{N}$, pois os inteiros e os racionais são imediatamente obtidos a partir dos naturais. Há três propriedades importantes que desejamos que $\mathbb{N}$ tenha:

- contém 0 e este é seu menor elemento;
- se contém n, então contém $n+1$ e, quando $n \geqslant 1$, também contém $n-1$;

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- se contém n, então não se intersecta com $]n, n+1[$.

Não é fácil mostrar que existe um tal subconjunto dos reais, a partir dos axiomas que já enunciamos. Note que $[0, \infty[$ tem as duas primeiras propriedades acima. Podemos, então, tomar $\mathbb{N}$ como o *menor* conjunto que tenha essas duas propriedades, ou seja, $\mathbb{N}$ é a coleção dos números comuns a $[0, \infty[$ e os demais conjuntos assim, como por exemplo $\{0\} \cup [1, \infty[$. Resta mostrar que $\mathbb{N}$ tem a terceira propriedade; mas se existem naturais n, k satisfazendo $n < k < n + 1$, então $0 < k - n < 1$, enquanto não há elementos entre 0 e 1 em $\{0\} \cup [1, \infty[$, que é maior que $\mathbb{N}$. □

2.2 Pontos infinitos

$\mathbb{R}$ e $]-1, 1[$ são muito parecidos. (Escala na lousa.) De fato, $\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1}(x)$ é bijeção contínua crescente.

Mas $\mathbb{R}$ não tem começo nem fim, enquanto $]-1, 1[\subseteq [-1, 1]$.

Introduzimos dois novos símbolos ∞ e $-\infty$; *não são números e não fazem contas.*

$-\infty$ antes de todos os reais: $-\infty < \ldots < -10^{400} < -3 < \ldots$

∞ depois de todos os reais: $\ldots < 1 < 200 < 10^{780} < \ldots < \infty$.

Expressões usando $\pm\infty$ podem ser reescritas somente com números reais; os infinitos servem para *abreviaturas.*

Exemplo: $\sup \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \infty$ equivale a "f ilimitada superiormente". (Veremos supremo a seguir.)

Algumas "contas" são escritas com $\pm\infty$, mas servem apenas para intuição.

Fica terminantemente proibido escrever

$$\cancel{\frac{17}{-5+\infty} = 0}$$

e barbeiragens análogas!

2.3 O Axioma do Supremo

O Axioma do Supremo é o que falta para descrevermos as propriedades fundamentais da reta real. De fato, não só ele é utilíssimo para justificar todo

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

o Cálculo (como veremos repetidamente), mas também se pode mostrar, em cursos de Análise, que $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado "completo" (ou seja, em que ele vale).

> Vários números irracionais: $\sqrt{2}, \pi, e, \ldots$
> Por que não estão em $\mathbb{Q}$?
> Expansões decimais truncadas em $\mathbb{Q}$: $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \ldots$

Decidir se cada um desses números, entre muitos outros, é racional ou irracional já é um trabalho hercúleo e às vezes ainda em aberto, mas podemos ver o que acontece com $\sqrt{2}$. Se este número fosse racional, digamos a fração m/n com m, n inteiros, então $2 = m^2/n^2$, isto é, $m^2 = 2n^2$. Agora, note que m^2 tem, em sua decomposição em números primos, uma potência par (ou zero) de 2, porque tal potência é o dobro daquela de m. Do mesmo modo, $2n^2$ tem uma potência ímpar. Sendo os dois números iguais, chegamos a um absurdo.

> Essas expansões truncadas formam uma sequência crescente.
> O que distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ é uma tal sequência admitir um *supremo* (no caso, $\sqrt{2}$).
> Esse número é o "melhor teto" da sequência.

> Formalmente:
> Suponha $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e A limitado superiormente, isto é,
>
> $$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\,(x \leqslant K).$$
>
> O *supremo* de A é o menor limitante superior de A, ou seja:
>
> - todo $x \in A$ é $\leqslant \sup A$ e
> - se todo $x \in A$ é $\leqslant K$, então também $(\sup A) \leqslant K$.
>
> *O Axioma do Supremo diz que todo A assim tem supremo em $\mathbb{R}$.*

Assim, encontramos uma diferença fundamental entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$. Podemos, em cada um deles, tomar o conjunto de racionais menores que $\sqrt{2}$, π ou e, mas somente em $\mathbb{R}$ eles têm supremos.

Para falarmos de supremo de um conjunto A de números reais, é preciso que A seja não-vazio e limitado superiomente. Porém, costuma-se utilizar a seguinte notação para abreviar os "casos omissos":

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- Se A é não-vazio, mas não é majorado (isto é, não tem "teto"), então escrevemos $\sup A = \infty$. Tal uso é extremamente importante!
- Também escrevemos $\sup \emptyset = -\infty$.

Você pode entender a notação usada para esses "casos omissos" pensando a respeito de nossa discussão sobre os pontos $\pm\infty$.

Qual é a diferença entre supremo e máximo?

O máximo sempre pertence ao conjunto.

Se A tem máximo, então $\sup A = \max A$.
Porém, vários conjuntos não têm máximo: $]-\infty, 5[$.

(O máximo, se existir, é o menor limitante superior do conjunto.)

Como mostrar que um número é supremo? Pela definição!
Determine $\sup A$ intuitivamente, então verifique duas coisas:

- Todo $x \in A$ é menor ou igual a $\sup A$;
- Ninguém menor que $\sup A$ é limitante superior de A, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ (*por menor que seja*), existe algum $x \in A$ entre $[(\sup A) - \varepsilon]$ e $\sup A$.

Exemplo
Considere $A =]-\infty, 5[$. Então $\sup A = 5$.

- Temos $x \leqslant 5$ para todo $x \in A$;
- Se $\varepsilon > 0$ então podemos encontrar $x \in A$ com $5 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 5$. (Ex.: $x = 5 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$.)

Nem sempre podemos determinar o valor explícito do supremo ou conseguir uma prova.
O axioma garante sua existência e, portanto, podemos usá-lo em forma literal.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Por exemplo, utilizaremos o supremo para definir o número π sem recorrer à área ou ao perímetro de um círculo. Na abordagem axiomática que contemplamos, definir e calcular áreas e comprimentos de figuras curvas é bem difícil, matéria para o capítulo "Integração Definida", sendo mais simples, neste estágio da teoria, realizar tais definições e medições para polígonos no plano $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

$\mathcal{F}$: família dos polígonos cujos vértices distam todos 1 da origem.
A: conjunto dos números que são áreas de polígonos em $\mathcal{F}$.
Então:

- $A \neq \emptyset$ porque $2 \in A$ (quadrado de vértices $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ em $\mathcal{F}$);
- todo $x \in A$ é $\leqslant 4$ (todo $P \in \mathcal{F}$ está contido no quadrado de vértices $(\pm 1, 1)$ e $(\pm 1, -1)$).

Portanto, A tem supremo, chamado π.
Até aqui, sabemos que $2 \leqslant \pi \leqslant 4$, mais nada...

Discussão extraordinária: Como outro exemplo, lembre que, em nossa discussão sobre a exponenciação em "Funções em Perspectiva", faltou generalizar a definição obtida das potências racionais para todas as reais. Tratemos disso agora: Já sabemos calcular as potências a^r para $a \geqslant 1$ e $r \in \mathbb{Q}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, pomos

$$a^x = \sup \{\, a^r \mid r \in \mathbb{Q}^{<x} \,\}.$$

Para $0 < a < 1$, como a função exponencial é decrescente, devemos ter cuidado com os sinais e colocar

$$a^x = \sup \{\, a^r \mid r \in \mathbb{Q}^{>x} \,\}.$$

Esse mesmo princípio pode ser usado para mostrar que a^x é sobrejetora: você consegue adaptá-lo para extrair logaritmos?

O outro passo faltante era extrair a raiz por qualquer potência natural de um número positivo. Você pode ver o cálculo completo em Rudin, Teorema 1.21, mas aqui está uma idéia específica para obter $\sqrt{2}$:

Considere $A = \{\, r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leqslant 2 \,\}$, que é limitado por 3 e contém 0; tome $x = \sup A$. Mostraremos que $x^2 = 2$ porque as alternativas $x^2 < 2$ e $x^2 > 2$ levam a contradições. Observando que $x > 0$, construa

$$x^* = x - \frac{x^2 - 2}{x + 2},$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

que também é positivo porque é igual a $(2x+2)/(x+2)$. Então

$$(x^*)^2 - 2 = \frac{2(x^2-2)}{(x+2)^2},$$

cujo denominador é sempre positivo. Agora, se $x^2 < 2$ então os numeradores são negativos e $x^2 < (x^*)^2 < 2$; se $x^2 > 2$ então os numeradores são positivos e $2 < (x^*)^2 < x^2$. Em ambos os casos, obtivemos x^* mais próximo de $\sqrt{2}$ que x. No primeiro caso, tome um racional r de modo que $x < r < x^*$; então $x^2 < r^2 < 2$, de modo que $A \ni r > \sup A$, contradição. No segundo, novamente tome um racional r com $x^* < r < x$; então $2 < r^2$, de modo que r limita A por cima e é menor que $x = \sup A$, absurdo. Note que, na definição de A, não escrevemos $\sqrt{2}$ explicitamente.

□

Exercício

Suponha que $I_n = [a_n, b_n]$, para $n \in \mathbb{N}$, satisfaçam

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots.$$

Mostre que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.[a]

Dica: mostre que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.

Por outro lado, note que $\bigcap_{n=0}^{\infty} [n, \infty[= \emptyset$.

Discussão extraordinária: Finalmente, podemos indicar (intuitivamente) uma construção de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$: trata-se de *associar formalmente,* em um truque de abstração, um supremo a cada conjunto de racionais não-vazio e majorado, isto é, *tomar esses próprios conjuntos* (alguns dos quais já têm máximos racionais) como números reais. Na literatura, para esse fim, escolhem-se conjuntos especiais de racionais chamados "cortes de Dedekind". Para definir adição e multiplicação entre eles, operamos entre os elementos desses conjuntos e, com o cuidado necessário devido a sinais, tomamos novamente supremos como resultados das operações. Então é preciso verificar todos os axiomas de corpo ordenado e de supremo; este último, embora pareça trivialmente satisfeito e seja o motivo dessa própria construção, deve ser verificado também e requer algum trabalho. □

Ínfimo de $A \neq \emptyset$ minorado: $\inf A$.
Sempre existe: $\inf A = -\sup\big(\{\, -a \mid a \in A \,\}\big)$.
Se A contiver um mínimo, então $\inf A = \min A$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício extraordinário: Todo conjunto não-vazio de números naturais tem mínimo, ou seja, se $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$, então existe $\min S$. (Invocaremos isso no estudo do Princípio da Indução. Os outros conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ não têm essa propriedade!) Para demonstrar esse fato, responda:

- Intuitivamente, basta começar por 0, 1, 2,... até achar o primeiro elemento de S. Porém, isso não é uma demonstração: por quê?[a]
- Use a existência de ínfimos para prová-lo.[b]
- Exemplifique-o obtendo um número inteiro entre quaisquer dois reais com diferença 1.[c] □

Concluímos a seção com uma propriedade que, muitas vezes, é mais prática de ser usada que o Axioma do Supremo:

Arquimedianidade

Dado $K > 0$ (*por maior que seja*), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > K$.
Dado $\varepsilon > 0$ (*por **menor** que seja*), existe $n \in \mathbb{N}^{\neq 0}$ com $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
Dados quaisquer $a, b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Exercício

Mostre que esses três enunciados são equivalentes.[d]

Como seu nome indica, essas propriedades foram muito utilizadas por Arquimedes, embora observadas antes por Eudoxo. Embora elas valham para quaisquer números dados, frisamos que o que realmente se deseja intuir é a respeito de situações de números "muito grandes" ou "muito pequenos".

Exemplo

Considere $A = \{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \}$. Então $\sup A = 0$.

- Temos $-\frac{1}{n} \leqslant 0$ para todo n;
- Se $\varepsilon > 0$ então podemos encontrar n com $0 - \varepsilon \leqslant -\frac{1}{n} \leqslant 0$;
- Isso é garantido pela arquimedianidade!

Use a arquimedianidade para mostrar a existência de um número racional estritamente entre quaisquer dois números reais distintos.[e]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Demonstração da arquimedianidade:
Assuma $K > 0$ tal que todo $n \in \mathbb{N}$ é $< K$.
Então $\mathbb{N} \neq \emptyset$, majorado; existe $x = \sup \mathbb{N}$.
Então $x - 1$ (que é $< x$) não majora $\mathbb{N}$: existe $n \in \mathbb{N}$ com $x - 1 < n$, donde $x < n + 1 \in \mathbb{N}$, contradizendo condição de supremo.

Então a arquimedianidade é uma conseqüência do Axioma do Supremo. Porém, esse axioma não é necessário para que ela seja válida, ou seja, a arquimedianidade não é uma formulação *equivalente* da completude da reta real. De fato, observe que $\mathbb{Q}$ também é um corpo arquimediano, embora não seja completo.

2.4 O Princípio da Indução

Devemos fazer parênteses em nosso estudo da estrutura dos reais e, momentaneamente, ocuparmo-nos de uma propriedade dos números naturais que possibilita um importante método de raciocínio e demonstração em Matemática. Ela é:

> Suponha que temos proposições ou afirmações P_n, uma para cada número natural n. Se valer P_0 e se valerem todas as implicações $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, então valem todas as proposições P_n.

A imagem tradicional desse princípio é a das seqüências de dominós enfileirados: Se derrubamos o primeiro e garantimos que cada um derruba o seguinte, então estaremos certos que todos são derrubados.

Considere as proposições, uma para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n\colon 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

Por exemplo, P_0 é a afirmação $0 = 0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)/6$, verdadeira. Serão as outras verdadeiras ou falsas?
Suponhamos que P_n seja verdade, então vejamos como calcular a soma seguinte...

P_0 é chamada *base da indução.*

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2] + (n+1)^2 = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\
&= (n+1)\Big[\frac{2n^2+n}{6} + \frac{6(n+1)}{6}\Big] = \\
&= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Note que isso é

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = (n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]/6,$$

ou seja, é a afirmação P_{n+1}.

Esse cálculo, para mostrar P_{n+1} a partir de P_n, é chamado *passo da indução.*

Assim, sabemos que vale P_0 e que valem todas

$$P_0 \Rightarrow P_1,\ P_1 \Rightarrow P_2,\ P_2 \Rightarrow P_3, \ldots,\ P_{1\,\mathrm{mol}} \Rightarrow P_{1\,\mathrm{mol}+1}, \ldots;$$

concluímos que valem todas

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots,\ P_{1\,\mathrm{mol}},\ P_{1\,\mathrm{mol}+1}, \ldots$$

Em símbolos, esse *Princípio da Indução* é

$$[P_0 \text{ e } \forall n\,(P_n \Rightarrow P_{n+1})] \Rightarrow \forall n\, P_n.$$

Note bem: Em nenhum momento o Princípio da Indução disse-nos como calcular $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ e obter o resultado $n(n+1)(2n+1)/6$. Isso (e o resultado correspondente em uma situação qualquer) deverá ser obtido de algum outro modo, ou com um raciocínio combinatórico, ou a partir de estimativas, ou mesmo como uma "hipótese científica" a ser testada.

Note ainda que esse tipo de raciocínio somente funciona para proposições indexadas por $\mathbb{N}$ ou até, sendo uma questão de translação, pelo conjunto $\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0 \}$ onde n_0 é algum número inteiro inicial. Desse modo, não pode ser aplicado diretamente para proposições sobre números em conjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ou mesmo $\mathbb{Z}$. (A ordem nesses domínios não funciona como em $\mathbb{N}$:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

comentamos na página 45 que todo conjunto de naturais tem mínimo, o que utilizaremos abaixo.)

Vejamos o *porquê* dele funcionar: Suponha, ao contrário, que P_n não vale para algum inteiro $n \geqslant n_0$ e, então, suponha que esse n é o índice mínimo para o qual P_n não vale. Sabemos que $n \neq n_0$ porque verificamos, preliminarmente, a validade de P_{n_0}. Assim, $n \geqslant n_0+1$, donde $n_0 \leqslant n-1 < n$. O fato de n ser mínimo implica que P_{n-1} deve ser verdade; somando-se isso a uma demonstração de $P_{n-1} \Rightarrow P_n$, concluímos que P_n também deve valer, apesar de nossa hipótese a respeito.

Como segundo exemplo do Princípio da Indução, provaremos a *desigualdade de Bernoulli:* Para todo real x satisfazendo $0 \neq x > -1$ e para todo inteiro $n \geqslant 2$, temos $(1+x)^n > 1+nx$.

A base da indução consiste em provar o enunciado inicial. Aqui, ele é P_2 e afirma que $(1+x)^2 > 1+2x$ quando x é apropriado. Isso é verdade, já que $x \neq 0$ garante $x^2 > 0$ e então $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x+0$. (Ainda não usamos a hipótese $x > -1$.)

Agora, o passo da indução requer que demonstremos $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para *qualquer* $n \geqslant 2$. Para tanto, assumamos que P_n é verdade para calcular

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > [1+nx](1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x,$$

onde a primeira desigualdade é dada conjuntamente por P_n e o fato de que $1+x > 0$ (dado por $x > -1$) e a segunda faz novo uso de $x^2 > 0$.

Exercício

Use a mesma técnica para mostrar que:

- $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$ para $n \geqslant 0$;[a]
- todo conjunto de n elementos tem 2^n subconjuntos, para $n \geqslant 0$;[b]
- $n! > (n/3)^n$ para $n \geqslant 6$ (assuma $(1+1/n)^n < 3$ para $n \geqslant 6$).[c]

Eis mais enunciados que podemos demonstrar "por indução":

- $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ para $n \geqslant 0$, *sem usar a somatória de progressão aritmética!*[d]
- Sem saber nada de derivação e assumindo apenas a regra sintática $(fg)' = f'g + fg'$, prove abstratamente para $n \geqslant 2$ que[e]

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i' \times \prod_{j\neq i} f_j\right).$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- O Teorema Binomial é a igualdade

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

em que x, y são reais arbitrários e $n \geqslant 1$.[a]

Pesquise quais deles podem ser provados de outros modos!

2.5 Valor absoluto e a métrica da reta

Retomamos a descrição dos números reais: os axiomas de corpo ordenado deram-nos conhecimento *algébrico* ou operacional; o Axioma do Supremo tem natureza *analítica* em vista da noção de aproximação que ele sugere; agora, estudaremos a estrutura *topológica* da reta. Trata-se de dar novos nomes e perspectiva ao conhecimento que já temos.

(Para números reais $x, y, \ldots$)
Valor absoluto ou módulo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Propriedades:

- $|x| = \max\{x, -x\}$;
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;
- $|xy| = |x|.|y|$;
- $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Você pode demonstrar todas essas propriedades e outras de uso prático: para fazê-lo, bastam os axiomas de corpo ordenado e a própria definição de módulo. Porém, não nos preocuparemos mais com esse rigor.

Por exemplo, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ segue de $|x| + |y| \geqslant x + y$ e $|x| + |y| \geqslant (-x) + (-y)$. Ela é uma das formas da *desigualdade triangular* e tem duas consequências importantes:

- $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$;

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

(A primeira é obtida de $|x-z| = |x-y+y-z|$ e a segunda de $|x| = |x-y+y|$ e $|y| = |y - x + x|$.)

Observe também que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ e que $|x|$ é o único $\geqslant 0$ com quadrado igual a x^2. Isso significa que $|x|^2 = x^2$, de modo que não precisamos ter cuidado com o sinal de x quando o módulo está ao quadrado, e que $\sqrt{x^2} = |x|$, ou seja, simplificar uma raiz par requer atenção com sinais.

Convém revisar a operação prática de módulos:

Lembrete

Para resolver $|x - 5| = 4$:

- quando $x \geqslant 5$, temos $|x - 5| = x - 5 \Rightarrow x - 5 = 4 \Rightarrow x = 9$;
- quando $x < 5$, temos $|x - 5| = -(x - 5) \Rightarrow 5 - x = 4 \Rightarrow x = 1$.

Para resolver $x \cdot |x + 1| = 6$:

- se $x \geqslant -1$ então $|x + 1| = x + 1$ e temos $x(x + 1) = 6$ com raízes 2 e -3, *mas somente* $2 \geqslant -1$*;*
- se $x < -1$ então $|x + 1| = -(x + 1)$ e temos $-x(x + 1) = 6$ sem raízes.

Mais módulos implicam em mais casos.

Assim, recorde que é preciso considerar todas as possibilidades para os sinais dos argumentos dos módulos, mas também que podemos delimitá-las determinando as raízes dos mesmos.

Outro exemplo é a equação $|x - 2| = -|x|$. Os pontos 0 e 2 são aqueles em que algum módulo presente se anula. Portanto, dividimos nossa análise em casos:

- O primeiro é quando $x < 0$ e, então, ambos os modulandos são negativos e a equação que queremos resolver transforma-se em $-(x - 2) = -(-x)$. A solução $x = 1$ não pertence ao intervalo considerado e é descartada.
- No segundo, quando $0 \leqslant x < 2$, o primeiro modulando é negativo e o segundo é positivo, donde $-(x - 2) = -(x)$. Essa equação não tem solução.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- No terceiro, temos $x \geqslant 2$ e, portanto, ambos os modulandos são positivos e obtemos $x - 2 = -x$. Novamente, a solução $x = 1$ não pertence a esse intervalo.

Concluímos que $|x - 2| = -|x|$ não tem solução nos números reais.

Pratique esse raciocínio com estas equações:

- $|x - 2| - 4 = -|x|$;[a]
- $|x + 2| - |x - 3| = 5$;[b]
- $|x + 1|^2 - 5|x + 1| + 6 = 0$;[c]
- $|x + 1|^2 + |x + 1| - 6 = 0$;[d]
- $|x^2 - 4| \geqslant |5 - x|$.[e]

Enfim, o que faremos com o valor absoluto é medir distâncias entre números reais. Para tanto, algumas de suas propriedades podem ser formuladas assim:

A função $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, satisfaz:

- $d(x, y) \geqslant 0$;
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(y, x) = d(x, y)$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

É chamada *função distância ou métrica.*

Essas propriedades, dentre outras possíveis de enunciar, são o que justifica o nome "função distância", porque qualquer função que meça distância (como se estuda no assunto de "espaços métricos" em Matemática) deverá satisfazê-las.

A última delas é outra versão da *desigualdade triangular* que discutimos acima e é mais facilmente entendida quando visualizada no plano, em vez da reta. Para tanto, marque pontos x, y, z como os vértices de um triângulo, meça seus lados e verifique quais relações essas medidas devem satisfazer para que o triângulo possa ser formado.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

2.6 Vizinhanças e pontos importantes

O conceito de vizinhança objetiva formalizar, na reta real, alguma noção de proximidade que deve acompanhar a relação de distância especificada.

A fim de cumprir isso, começamos recordando o que é um intervalo.

> Um *intervalo* é um $I \subseteq \mathbb{R}$ com $[x, y] \subseteq I$ sempre que $x, y \in I$.
> Tipos: $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$, $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$, $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$ *e também* $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$, $\{a\} = [a, a]$, $\emptyset$.

(Às vezes, podemos encontrar a notação de intervalo fechado em um extremo $\pm\infty$. Isso ocorre quando o autor trabalha também com os pontos infinitos e trata-se, simplesmente, de incluí-los no conjunto em questão.)

Nossa definição diz que I é intervalo se, toda vez que $x, y \in I$, qualquer ponto z entre x e y também está em I. Em cursos de Análise, você conhecerá conjuntos "conexos (topologicamente)", "conexos por arcos ou caminhos", "conexos por caminhos poligonais", "convexos" e "paralelepípedos". No caso da reta real, onde temos dimensão um, todos esses conceitos são equivalentes ao de intervalo.

Será que todos os intervalos têm o aspecto indicado nessa lista de tipos de intervalo? Sim! Mostrá-lo consiste em desenvolver o seguinte roteiro: Suponha que I satisfaz aquela definição de intervalo. Tome $a = \inf I$ e $b = \sup I$ (incluindo casos $\pm\infty$). Então mostre que I deverá ter uma das formas $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$, conforme a ou b pertença a I. Há quatro combinações de possibilidades, então assuma cada uma delas em sequência para tratar todos os casos (o mais simples é quando ambos $a, b \in I$). Além disso, é preciso ver quando a ou b são reais ou $\pm\infty$: os raciocínios são semelhantes, mas o modo de escrever muda um pouco.

> Uma *vizinhança* de um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que existem x, y com
>
> $$a \in]x, y[\subseteq V.$$
>
> Isto é, V contém $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ para algum $\varepsilon > 0$: podemos andar um pouco tanto para a esquerda quanto para a direita.
> Isso será útil quando quisermos fazer cálculos no entorno de a.

(Enfatizamos: é preciso ter o ponto a especificado.)

A palavra "vizinhança" é utilizada realmente com seu significado cotidiano. Concentramo-nos no que acontece *localmente* em torno de a, não nas

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

regiões mais afastadas da reta ou em todo o domínio de uma função. Porém, exigimos que sempre temos espaço tanto à esquerda de a como à direita, para que possamos efetuar cálculos de interesse; os intervalos apresentados são sempre abertos. Isso se tornará mais relevante quando estudarmos limites e derivadas.

Interpretaremos uma vizinhança como uma espécie de "microscópio" que usamos para explorar uma seção da reta real com *zoom* (ampliação) do entorno de um ponto fixado. Esse microscópio, independentemente do *zoom* utilizado, mostra sempre um pouco de espaço tanto para a esquerda, como para a direita do ponto.

Fixe $D \subseteq \mathbb{R}$ (por exemplo, um domínio de função) e $a \in \mathbb{R}$ (dentro ou fora de D); veremos exemplos a seguir:

- *a é ponto de acumulação de D* se toda vizinhança de a (*por menor que seja*) contém um ponto de D **distinto** de a.
- *a é ponto isolado de D* se $a \in D$, mas não é ponto de acumulação de D.
- *a é ponto interior de D* se existe uma vizinhança de a contida em D, ou seja, o próprio D é vizinhança de a.

(Enfatizamos: para usar essas três expressões, é preciso especificar ambos D e a.)

Essas definições são tão importantes, em vista dos raciocínios que incorporam, que merecem paráfrases:

A acumulação é o conceito mais sofisticado: a é ponto de acumulação de D se, para qualquer vizinhança V de a, temos $(V \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Neste caso, é essencial que toda vizinhança contenha pontos de D além do próprio a, mas o próprio a pode ou não pertencer a D. Em termos do microscópio que ideamos acima, por maior que seja o *zoom* dado em torno do ponto a, sempre aparecem pontos de D (além de a) na imagem. Não é preciso que a vizinhança contenha todo o D ou que esteja totalmente contida em D.

Para a ser ponto isolado de D, é exigido que pertença a D e, negando a definição de ponto de acumulação, que tenha uma vizinhança V suficientemente pequena para que a seja o único ponto de D ali, isto é, $V \cap D = \{a\}$. Assim, podemos aumentar o *zoom* em torno de a até um certo momento em que nenhum outro ponto de D apareça na imagem.

Finalmente, a é um ponto interior de D caso exista $\varepsilon > 0$ de modo que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq D$. Nesse caso, é claro, também temos $a \in D$. Desse modo,

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

podemos aumentar o *zoom* ao redor de a até um certo momento em que D preenche completamente a imagem, para ambos os lados de a, não sobrando nenhum buraco de D.

O processo de "*zoom* do microscópio" é a idéia central da Matemática moderna para substituir números infinitos no Cálculo. Trata-se de uma quantificação (existencial ou universal) sobre uma tolerância ε e, por isso, é um processo dinâmico: você deve encontrar um valor de ε que funcione ou observar que nenhum valor funciona, em vez de pensar sobre um único número; ou seja, a imagem mental a ser feita é um vídeo em movimento, não uma figura estática. Outro processo dinâmico, também usando quantificação, será feito no "jogo do ε–δ" na "Introdução aos Limites".

Exemplos

Conjunto $[0,1[\,\cup\{2\}$:

- cjto. pts. acumulação $= [0,1]$;
- cjto. pts. isolados $= \{2\}$;
- cjto. pts. interiores $= \,]0,1[$.

Conjunto $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \right\}$ (esquema na lousa):

- cjto. pts. acumulação $= \{0\}$;
- cjto. pts. isolados $= D$;
- cjto. pts. interiores $= \emptyset$.

Exercício

Determine os conjuntos de pontos de acumulação, isolados e interiores de cada conjunto:

- $\mathbb{Z}$;[a]
- $[0,2] \smallsetminus \{1\}$;[b]
- $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \right\}$.[c]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Quando dito *explicitamente,* incluimos $\pm\infty$:
Uma vizinhança de ∞ deve conter $]x, \infty]$ para algum $x \in \mathbb{R}$.
∞ é ponto de acumulação de todo conjunto ilimitado superiormente (ex.: $\mathbb{N}$).
(Analogamente para $-\infty$ e conjuntos ilimitados inferiormente.)

Note que os conceitos de vizinhança e acumulação definidos para $\pm\infty$ são extensões naturais daqueles feitos para pontos reais. De fato, seriam casos particulares de uma definição geral que estudasse toda a reta estendida $[-\infty, \infty]$ simultaneamente.

Discussão extraordinária: As definições acima (vizinhança, pontos de acumulação, etc.) trabalham com toda a reta real $\mathbb{R}$, mas podemos necessitar conceitos análogos quando trabalhamos em domínios diferentes. Dado $D \subseteq \mathbb{R}$, que será considerado um *subespaço,* podemos estudar a "topologia induzida": para $a \in D$, se V é uma vizinhança de a em $\mathbb{R}$ então a restrição $V \cap D$ é chamada *vizinhança de a em D induzida por V*. A idéia, portanto, é que utilizamos as vizinhaças originais para ter também uma noção de localidade dentro de um domínio de interesse. Isso será útil para formularmos a definição de limites. Desse modo, quando definirmos conjuntos abertos e fechados, poderemos dizer que $[-1, 0[$ é aberto em $[-1, 1]$ e que $]-1, 0]$ é fechado em $]-1, 1[$.

Veja que a estrutura de vizinhanças induzida em $]-1, 1[$ é muito semelhante à de $\mathbb{R}$ quando este é escrito $]-\infty, \infty[$. Reciprocamente, a estrutura adicional para os pontos $\pm\infty$ faz a "reta estendida" $[-\infty, \infty]$ parecer-se com o intervalo $[-1, 1]$. □

2.7 Conjuntos abertos e fechados

Concluímos este capítulo expandindo mais um pouco nosso vocabulário topológico. Conjuntos abertos e fechados serão muito úteis como domínio de funções que quisermos estudar usando Cálculo, porque em um conjunto aberto sempre temos o "espaço tanto à esquerda como à direita" de qualquer ponto e, por outro lado, um conjunto fechado contém todos os pontos a que poderíamos chegar "no limite".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Um conjunto é *aberto* quando todos os seus pontos são interiores.
Ou seja: $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$.
Os abertos de $\mathbb{R}$ são precisamente as uniões de intervalos abertos.
Exemplo: $]-\infty, 3[\cup]5, 9[$.

Tanto $\emptyset$ como $\mathbb{R}$ são abertos: cada um é vizinhança de todos os seus próprios pontos!

Já essa caracterização dos abertos de $\mathbb{R}$ permite a você construir inúmeros exemplos deles. Experimente!

Atente para a seguinte discussão: Por "intervalo aberto", queremos dizer que ele não contém seus extremos. Então, para concluir que ele é um conjunto aberto, há alguma coisa a ser feita, porque a definição de "aberto" não se refere a extremos de intervalos. Basta observar, entretanto, que todos os pontos de um intervalo aberto são interiores, estando contidos nesse próprio intervalo aberto. Do mesmo modo, são abertas também as uniões desses intervalos.

Reciprocamente, podemos mostrar que todo aberto é alguma união de intervalos abertos. Aqui está uma sugestão: se A é um conjunto aberto, então para cada $x \in A$ existe um intervalo aberto I_x tal que $x \in I_x \subseteq A$, porque x é um ponto interior de A. Feito isso, propomos que A é a união desses conjuntos I_x para todos $x \in A$. (Em símbolos, $A = \bigcup_{x \in A} I_x$, cf. discussão a seguir.) De fato, por um lado, como A contém cada I_x, também contém sua união; por outro, cada elemento x de A pertence a seu correspondente I_x e, por conseguinte, à união.

Um conjunto é *fechado* quando contém todos os seus pontos de acumulação.
Lembre: x é ponto de acumulação de F se

$$(\forall \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (F \smallsetminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Exemplo: $[-1, 0] \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \} \cup [3, \infty[$.

Novamente, $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos fechados, assim como todo intervalo fechado. Já não é verdade que uniões arbitrárias de intervalos fechados sejam conjuntos fechados: $]0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ não contém o ponto de acumulação 0. Um modo de conhecer mais conjuntos fechados é aplicar a caracterização dos abertos conjuntamente com o seguinte fato:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Teorema
$F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se e somente se F^c é aberto.
Na demonstração, praticaremos vários raciocínios importantes.

(Aqui, usamos uma de várias notações para complementos:

$$F^c = \complement_{\mathbb{R}} F = \mathbb{R} \setminus F = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin F \,\}.$$

Convém revisar essa definição e as propriedades de complementos com relação a um conjunto universo, que é $\mathbb{R}$ em nosso caso.)

Primeiro, assuma F fechado: devemos mostrar que F^c é aberto.
Fixe (arbitrário) $x \in F^c$: mostraremos que x é pto. interior de F^c.
Como $x \notin F$ fechado, então x não é pto. acumul. F, isto é,

$$\textbf{não } (\forall \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (F \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

ou seja,

$$(\exists \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (F \setminus \{x\}) = \emptyset,$$

donde

$$(\exists \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq F^c \cup \{x\} = F^c,$$

isto é, x é pto. interior de F^c.

(A última igualdade usa que $x \in F^c$, conforme o início do argumento.)

Agora, suponha que F^c é aberto: devemos mostrar que F é fechado.
Seja x (qualquer) pto. acumul. F: mostraremos que $x \in F$.
Temos

$$(\forall \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (F \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

ou seja,

$$(\forall \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subseteq F^c \cup \{x\},$$

donde

$$(\nexists \varepsilon > 0)\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq F^c,$$

isto é, x **não** é pto. interior de F^c.
Como F^c é aberto, não pode conter x; concluímos que $x \in F$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Existem conjuntos que não são nem abertos nem fechados, como $[0,1[$, $\mathbb{Q}$ e $\{\, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \,\}$; experimente justificar cada caso.[a] Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e o próprio $\mathbb{R}$.[b]

Discussão extraordinária: A família $\mathcal{T}$ de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é chamada *topologia da reta.* (Note que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.) Esclareceremos e provaremos três propriedades:

(1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$;

(2) $\mathcal{T}$ é fechada sob intersecções finitas;

(3) $\mathcal{T}$ é fechada sob uniões arbitrárias.

Conclui-se, em vista do teorema apresentado acima, que uniões finitas e intersecções arbitrárias de fechados são ainda fechadas e que todo conjunto fechado é uma intersecção de intervalos fechados.

Primeiramente, sabemos que $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são abertos.

Agora, trabalharemos com abertos A, B e argumentaremos que $A \cap B$ também é aberto: Para $x \in A \cap B$, queremos mostrar que x é ponto interior de $A \cap B$. Tome $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ com $]x - \varepsilon_A, x + \varepsilon_A[\subseteq A$ e $]x - \varepsilon_B, x + \varepsilon_B[\subseteq B$. Com $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\} > 0$, temos $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq A \cap B$.

E quanto a outras intersecções finitas? Antes de mais nada, aí ocorre um abuso de linguagem: a intersecção não será (necessariamente) um conjunto finito; trata-se, na verdade, de uma intersecção de um número finito de conjuntos.

Dados $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, queremos também $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{T}$. Procederemos por indução em n: o caso $n = 1$ é imediato e o que provamos é o caso $n = 2$. Supondo que o resultado vale para n, provaremos o correspondente para $n + 1$. Coloque $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ e $B = A_{n+1}$, de modo que desejamos $A \cap B \in \mathcal{T}$. Mas já temos $B \in \mathcal{T}$ porque esse conjunto já é dado como aberto, enquanto $A \in \mathcal{T}$ por hipótese (caso n). Então aplicamos o resultado prévio (caso 2).

(Estude esse exemplo do Princípio de Indução com detalhe: antes trabalhávamos com proposições sobre números, agora trabalhamos com uma proposição sobre conjuntos, mas o mecanismo é o mesmo.)

Enfim, suponha que I é não-vazio e que são dados $A_i \in \mathcal{T}$ para $i \in I$, ou seja, I é um *conjunto índice* e os conjuntos indexados por I são todos abertos. Queremos $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$, onde

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \mid (\exists i \in I)\, x \in A_i \,\}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se x pertence a essa união, então $x \in A_{i_0}$ para algum $i_0 \in I$ e, portanto, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A_{i_0}$ para algum $\varepsilon > 0$, de modo que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

Nesses cálculos, tomamos contato com dois conceitos interessantes da Teoria dos Conjuntos. Um é usar elementos de um conjunto como índices de outros conjuntos. O outro é formar uniões de famílias de conjuntos. A notação $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ indica a mesma coisa que $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$, enquanto a notação análoga $\bigcup_{n=0}^{k} X_n$ significa $X_0 \cup \ldots \cup X_k$ e é semelhante, em espírito, à de somatória $\sum_{n=0}^{k} x_n$.

É com esse tipo de união mais amplo que dizemos que todo aberto de $\mathbb{R}$ pode ser obtido como uma união de intervalos abertos. □

Discussão extraordinária: Existe uma outra classe de conjuntos bem comportados, chamados *compactos.* Vejamos, antes da definição, uma caracterização e uma propriedade: (1) um teorema (chamado de Heine–Borel em homenagem aos matemáticos que o divulgaram) garante que os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ são precisamente os fechados limitados; (2) uma função contínua (como estudaremos neste curso) com domínio compacto não somente é limitada, mas atinge ambos os "melhores teto e piso", ou seja, ela assume valores máximo e mínimo nesse domínio.

A definição é assim: um conjunto K é compacto se qualquer cobertura de K por conjuntos abertos admite uma subcobertura finita. Então precisamos saber o que é cobertura! É uma família de conjuntos (no caso, abertos) cuja união contém K. A subcobertura finita consiste de um número finito de conjuntos dessa mesma família cuja união ainda contém K. Ou seja, se $K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ onde todos os A_i são abertos, então existe um subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ de modo que $K \subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Mencionamos também os conjuntos *conexos* na página 52. Um conjunto X é conexo se *não* pode ser separado por abertos, isto é, *não* existem abertos A, B tais que $X \subseteq A \cup B$ e ambas as intersecções $X \cap A \neq \emptyset$ e $X \cap B \neq \emptyset$. Essa propriedade é importante quando se estuda o Teorema do Valor Intermediário e suas variações. Na reta real, os conexos são precisamente os intervalos, mas no plano ou no espaço tridimensional a situação muda dramaticamente: que tal procurar por definições dos termos entre aspas que definimos naquela página? □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 3

Introdução aos Limites

Temos duas metas neste capítulo: compreender o fenômeno dinâmico dos limites, em contraste com a estaticidade das manipulações algébricas, e revisar essas mesmas manipulações que são necessárias para o cálculo desses limites.

A "Análise Básica" tratará os limites e o conceito de continuidade por completo.

3.1 Atualidade, história e necessidade

Eis o que faremos:

Nosso plano de trabalho

- Desenvolver o conceito a partir de explorações geométricas;
- Formalizar a definição;
- Estabelecer regras práticas e exemplos;
- Calcular sem usar a definição;
- Expandir o conceito.

O desenvolvimento do conceito de limite foi uma das conquistas mais difíceis e exitosas da Matemática em sua história. Mentes poderosas debruçaram-se sem sucesso sobre essa questão. Por culpa dessa natureza complexa, o problema de definir e calcular limites tem uma solução que, embora simples,

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

é difícil de digerir em curto espaço de tempo. De onde veio esta definição? Por que é assim?

É totalmente irreal querer respostas imediatas. Nosso propósito, aqui, é explorar uma motivação para a definição formal e realizar essa formalização porque, lembramos, tudo em Matemática deve ser demonstrado não por intuição, mas a partir do que já está realmente fixado. Depois disso, veremos como enclausurar tal definição, substituindo-a por regras operacionais para calcular a maioria dos limites que precisarmos sem nos preocuparmos com os detalhes por trás.

Uma apresentação do conceito de limite que espelhe seu desenvolvimento histórico é bastante instrutiva e curiosa, mas inviável dentro das limitações de tempo e requesitos dos cursos introdutórios de Cálculo. *Procederemos analogamente à nossa aprendizagem da escrita: ignoramos os ideogramas e alfabetos primitivos e adotamos apenas a forma contemporânea.* Entretanto, como dissemos acima que se trata de um feito recorde, convém ter em mente sua extensão cronológica:

História

- Gregos e escolásticos hesitaram em usar (a) grandezas infinitas ou infinitamente pequenas ou (b) um número infinito delas.
- Renascentistas (até meados séc. XVIII) decidiram fazer contas assim mesmo.
- Cauchy, Weierstrass e outros substituíram tais grandezas por *aproximações controladas.*
- Assim, $\pm\infty$ e "número bem pertinho de outro" passaram a ser *abreviações* e tudo pode ser reescrito em termos somente de grandezas reais.

(No séc. XX, começou-se a formalizar os cálculos originais dos renascentistas com grandezas além dos números reais, ou seja, trabalhando-se em corpos não-arquimedianos que estendem o corpo $\mathbb{R}$. Esse assunto é a *Análise Não-Standard* e relacionado com a área de pesquisa do autor.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Uma necessidade motivadora

O que é uma velocidade instantânea?

Conhecemos velocidades médias

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

ao redor de um instante t_0.

Podemos considerar t cada vez mais próximo de t_0.

Mas não podemos colocar $t = t_0$ porque o denominador seria nulo e não sabemos dividir por zero.

Todo o corpo de conhecimento do Cálculo serve como motivação para o estudo dos limites!

É a derivação, por exemplo, que permitirá definir e calcular velocidades instantâneas: sua definição consistirá em calcular o limite daquele quociente em t_0. *Note bem a situação:* ***não*** *diremos que o inverso de* 0 *é* $\pm\infty$*!! Como os gregos, faremos contas somente com números reais.*

Já para a integração, tentaremos exaurir áreas curvas usando figuras retangulares cada vez mais finas. Não podemos falar, porém, de uma soma infinita de polígonos infinitamente finos, embora possamos considerar uma soma de N de retângulos de base b/N e observar que o conjunto desses números, para vários N, tem um ponto de acumulação.

3.2 Exploração e formalização

Há três fenômenos que devemos contemplar: (1) contas por aproximações, que já pensamos conhecer porque são presentes em nosso cotidiano; (2) a interpretação gráfica de continuidade, ao menos em termos intuitivos; (3) o conceito de tolerância em respeito a um padrão ideal, mas inatingível.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Aproximações

Considere $f\colon \mathbb{R}^{\neq 0} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$ (Gráfico na lousa.)

Temos:

- $x = 1{,}000 \Rightarrow f(x) \approx 0{,}841$;
- $x = 0{,}100 \Rightarrow f(x) \approx 0{,}998$;
- $x = -0{,}010 \Rightarrow f(x) \approx 0{,}99998$.

(Para esse exemplo fazer sentido em sua calculadora, lembre-se de configurá-la para usar radianos em vez de graus.)

Então f não está definida em 0, mas é bem comportada em seu redor. Mas valerá para 0,5, 0,05, 0,005...? E quanto a $\dfrac{1}{1\,\mathrm{mol}}$? Valerá para *toda* aproximação? Como o escrever?

Vemos que o valor $f(x)$ está cada vez mais próximo de 1 conforme x é um de vários números cada vez mais próximos de 0. Assim, embora não tenhamos como calcular $f(0)$, porque 0 não pertence ao domínio de f, parece-nos que "$f(0) = 1$". Devemos especificar matematicamente o que pretendemos com essa expressão entre aspas e o conceito de limite fará esse trabalho.

Contudo, ao fazermos essa especificação, também devemos assegurar que (a) a mesma conclusão seja obtida ao fim de qualquer aproximação e que (b) não haja nenhuma "surpresa" escondida após uma quantidade razoável de refinamentos numéricos. Para tanto, convém avançarmos nossas investigações; na pág. 92 finalmente concluiremos que nossa definição independe da aproximação específica (e, por tabela, de sua "velocidade").

Tubinhos

(Três gráficos na lousa.) Em quê essas funções diferem?

(Cuidado: o conceito de ε-tubo em textos avançados parece com os tubinhos que exibimos, mas não é a mesma coisa.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A primeira função tem seu gráfico, em uma vizinhança de a, totalmente contido no tubo de raio ε ao redor de L. Intuitivamente, seu gráfico é uma curva contínua, mas ainda definiremos esse adjetivo explicitamente.

A segunda função tem o ponto $f(a)$ fora da curva do restante de seu gráfico. Encontramos um tubinho que, por qualquer que seja a vizinhaça de a, não contém o restante do gráfico. Porém, se desenharmos o tubinho ao redor da ordenada L, então existe uma vizinhança de a cuja imagem está contida no tubinho exceto pelo próprio $f(a)$.

A função com salto é parecida. Encontramos um tubinho que, novamente por menor que seja a vizinhança de a, contém apenas metade do gráfico. Aqui, por qualquer que seja L, não conseguimos proceder como nos outros dois gráficos.

Tolerâncias

Um produto final não é perfeito, mas sua qualidade é controlável: Se quisermos limitar o erro a um máximo, trabalhamos dentro de padrões estritos.

Assim, se queremos calcular $f(a)$ com tolerância $\varepsilon > 0$, precisamos conhecer a com tolerância δ.

Embora este último slide fale a respeito de calcular $f(a)$, a definição que faremos agora deixa $f(a)$ e também o próprio ponto a de fora. Os motivos para isso ficarão esclarecidos quando estudarmos situações em que (i) a não pertence ao domínio de f ou (ii) f é descontínua em a.

Escreveremos uma definição rigorosa de limite buscando captar a essência desses três fenômenos. Primeiramente, esclareceremos os detalhes fundamentais e elucidaremos seu enunciado para, depois, conhecermos diversos exemplos:

Formalização

Suponha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, L \in \mathbb{R}$. Dizemos que L é o *limite de f em a* se, para qualquer tolerância permitida $\varepsilon > 0$ (*por menor que seja*), existe uma folga $\delta > 0$ tal que se $x \in]a-\delta, a+\delta[$ e $x \neq a$ então $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

Em símbolos: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A notação lim já assume que esse número L, se existir, é único. Por isso, antes de adotá-la, devemos verificar que um único número pode ser

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

esse limite. Isso é simples: se ambos $L \neq L^*$ satisfizessem a mesma propriedade acima, poderíamos trabalhar com $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|L - L^*|$ e encontrar $f(x)$ pertencente a dois intervalos disjuntos (quais?), o que é um absurdo.

Outra expressão muito útil é "$f(x) \to L$ quando $x \to a$".

Veja que é afirmada, na propriedade definidora de limite, a existência de um certo δ. Esse número depende de f e L, claro, mas também de ε e de a, ou seja, se essas duas grandezas mudam, então δ tem que ser ajustado. Matemáticos costumam escrever $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ para indicar essa dependência.

Por outro lado, δ não depende de x, sendo x que deve pertencer ao intervalo de raio δ centrado em a. Finalmente, recorde que todas as letras utilizadas são nomes e (como sempre) podem ser substituídas ou permutadas em outras partes do texto.

Atenção:

- Deve valer "por menor que seja $\varepsilon > 0$".
- Usamos $x \neq a$ para poder trabalhar com $f(a) \neq L$ ou f nem definida em a.
- A definição diz somente quando L é limite, **não** como calcular L, **nem** se algum outro número é limite, **nem** se f sequer tem limite.

Determinar ou calcular L será o assunto futuro e de boa parte dos cursos de Cálculo!

Não é preciso que exista um limite: algumas funções oscilam muito depressa, como é o caso de $\operatorname{sen}(1/x)$ em torno do zero, e outras "explodem", como a própria $1/x$ com x próximo de zero.

A definição formal de limite pode ser parafraseada em termos muito usados em Matemática:

O jogo do ε–δ para f, a, L fixados:

Desafiante escolhe $\varepsilon > 0$ e Respondente tenta defender com $\delta > 0$ tal que

$$\big(\forall x \in \,]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[\big)\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Desafiante refina ε e Respondente tenta defender com δ mais refinado também.

Se Respondente sempre consegue, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Se Desafiante propõe ε *para o qual Respondente não tem* δ, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Cuidado para não se confundir! Na pouca Teoria dos Jogos envolvida aqui, assume-se que o Desafiante e o Respondente nuncam erram em suas escolhas para tentar ganhar o jogo. É claro que outros valores para δ podem não ajudar, mas se houver algum que faça o trabalho, então o Respondente saberá encontrar um destes. Qual é o raciocínio análogo quanto ao Desafiante?

Exemplo

$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. (Gráfico na lousa.)

Desafiante propõe qualquer $\varepsilon > 0$.

Respondente usa $\delta = \sqrt{9+\varepsilon} - 3 > 0$.

Se $x \in]3-\delta, 3+\delta[$ então $x^2 \in]9-\varepsilon, 9+\varepsilon[$.

Assim, Respondente consegue rebater qualquer proposta do Desafiante.

De onde tiramos esse δ? A figura indica a resposta: verificamos qual é o intervalo centrado em 3 totalmente contido na pré-imagem de $]9-\varepsilon, 9+\varepsilon[$. No lado direito, é claro que $3+\delta = \sqrt{9+\varepsilon}$. Quanto ao lado esquerdo, veja que temos

$$3 - \delta = 6 - \sqrt{9+\varepsilon} > \sqrt{9-\varepsilon}$$

porque, de fato, temos

$$36 > 18 + 2\sqrt{81-\varepsilon^2} = \left(\sqrt{9+\varepsilon} + \sqrt{9-\varepsilon}\right)^2.$$

Aqui, acabamos assumindo que $\varepsilon \leqslant 9$ para podermos tirar a raiz quadrada. Inspecione a figura e veja que, se o Desafiante propuser algum $\varepsilon > 9$ então o Respondente pode rebater com $\delta = 1$. *Assim, interessam apenas valores ε estritamente positivos com acumulação* 0 e não há problema em assumir uma limitação superior.

Exercício

Mostre graficamente (isto é, usando tubinhos para o jogo do ε–δ) que

$$\lim_{x\to(-2)} \frac{|x-8|}{2} = 5.$$

Use o gráfico para determinar δ algebricamente em termos de ε.[a]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$f = \chi_{[8,\infty[}$ e $a = 8$. (Gráfico na lousa.)

Fixe algum L, digamos $L = 0{,}6$.

Desafiante escolhe $\varepsilon = 2$ e Respondente responde $\delta = 1$; se $x \in]8-\delta, 8[$ então $f(x) = 0$ e se $x \in]8, 8+\delta[$ então $f(x) = 1$, ambos dentro de $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

Agora, Desafiante escolhe $\varepsilon = 1/5$ e Respondente não encontra δ: para qualquer $\delta > 0$, temos $f|_{]8-\delta,8[} = 0$ e $f|_{]8,8+\delta[} = 1$, mas distância entre $0, 1$ é maior que $2/5$.

Desafiante vence, de fato, para qualquer L: temos $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq L$ qualquer.

Nesse caso, diz-se que f *não tem limite em* 8. Alguns autores escrevem $\nexists \lim_{x\to 8} f(x)$.

Note que, para dizer que o limite não existe, é preciso verificar que nenhum número serve como limite, ou seja, que a propriedade usada na definição não é válida para nenhum L.

Exemplo

$f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = -4$. (Gráfico na lousa.)

Não há limite quando $x \to 0$.

Exercício

Por que nenhum L serve?[a]

Exemplo

$f(x) = 1/|x|$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 5$. (Gráfico na lousa.)

Não há limite quando $x \to 0$.

Exercício

Por que nenhum L serve?[b]

Este último caso, como veremos futuramente, admite uma notação especial. Contudo, *ainda se diz que f não tem limite em* 0*!!*

Exercício

Descreva $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$ em palavras e depois em símbolos:

"Existe um $\varepsilon > 0 \ldots$"[c]

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Esse exercício também permite treinar, mais uma vez, a negação dos conectivos lógicos, o que é uma questão de Português, não de Matemática!)

Novamente, observe: Essa negação corresponde apenas ao fato de o número especificado L não ser o limite como definimos. Ainda assim, pode haver um limite (sendo um número diferente) ou não haver limite algum. Como você expressaria isto em palavras e depois em símbolos? (Sugestão: comece uma vez com "Não existe $L \in \mathbb{R}$ de modo que..." e outra com "Para qualquer $L \in \mathbb{R}$...")[d]

3.3 Definição I para domínios próprios

Até agora, somente tratamos de funções definidas em toda a reta real. Para trabalharmos com funções cujos domínios são subconjuntos específicos de $\mathbb{R}$, devemos revisar nossa formulação. Faremos isso por partes:

Suponha $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ e a ponto interior de $\{a\} \cup D$. (Esquema de D na lousa.)

Então: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Essa definição corresponde àquela que formalizamos anteriormente, exceto que contempla funções definidas apenas em partes de $\mathbb{R}$ e, especialmente, ao redor do ponto no qual se toma o limite, mas talvez não no próprio ponto. Assim, o domínio D é uma vizinhança de a ou contém um "intervalo aberto perfurado" em a. Portanto, sobra espaço tanto para a esquerda de a, como para sua direita, em que podemos fazer contas com f. Veremos futuramente como descartar também essa hipótese, mas continuemos com esse caso simples no momento.

Note:

- Não importa se f está definida em a; não importa $f(a)$ em geral;
- Temos espaço à esquerda e à direita de a onde calcular f;
- Podemos assumir $x \neq a$ para fazer conta (ex.: dividir por $x - a$); escreva isso claramente.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

3.4 Como calcular o limite?

Nas situações introdutórias, é possível calcular um limite por substituição direta, *desde que a conta não "dê galho"*, o que pode dar a impressão de o conceito e o cálculo de limites serem inúteis. Isso é falso! Começaremos por essas contas simples e veremos depois como manobrar para evitar cálculos impossíveis como "dividir por zero":

Temos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para as seguintes funções, *desde que a pertença ao domínio:*

- Polinomiais (e constantes), módulo, exponenciais ($a \in \mathbb{R}$),
- raízes naturais ($a \geqslant 0$ se pares), potências reais ($a \geqslant 0$),
- logarítmicas ($a > 0$),
- seno e cosseno ($a \in \mathbb{R}$), tangente ($a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$),
- sen^{-1} e $\cos^{-1}$ ($-1 \leqslant a \leqslant 1$), tg^{-1} ($a \in \mathbb{R}$).

(Diz-se que tais f são *contínuas*, como veremos depois.)

Esses resultados são muito naturais quando consideramos os gráficos dessas funções, mas deveriam ser demonstrados a partir da definição de limite, ou seja, que aquela propriedade enorme de ε e δ vale quando f é uma dessas funções, a pertence a seu domínio e L é substituído por $f(a)$.

No caso das funções polinomiais, isso será possível com as regras de soma e produto que veremos a seguir, bastando mostrar que $\lim_{x\to a} x = a$ e $\lim_{x\to a} c = c$ para qualquer constante c. Estas duas identidades você pode mostrar com o jogo do ε–δ graficamente e, assim, determinar $\delta(\varepsilon)$ para uma demonstração algébrica.

Não é possível mostrar, em cursos básicos de Cálculo, que várias funções são contínuas. Essa tarefa é deixada para cursos de Análise porque, para mostrar algo sobre uma função, precisamos ter uma definição formal dessa função. No caso da função seno, por exemplo, o estudo de triângulos ou círculos trigonométricos ajudou-nos a criar essa função e será muito útil para compreender mesmo a definição formalizada, mas não se adequa ainda ao trabalho com ε–δ.

Utilizaremos, abaixo, as notações $\pm$ e $\mp$. Elas ***não*** significam que estamos considerando duas operações ou dois pontos simultaneamente! São

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

meras abreviaturas e convenciona-se que, se você escolher o sinal de cima (ou de baixo) para ler, deve sempre ler o sinal de cima (ou de baixo, respectivamente) nas ocorrências seguintes.

Regras de cálculo

No mesmo a:

- $\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) \pm \Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)$;
- $\lim_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) \times \Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)$;
- $\lim_{x\to a}\big(f(x)^N\big) = \Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^N$ para $N\in\mathbb{N}$ fixo;
- $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ se $\exists \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Em particular, constantes multiplicativas "passam para fora do limite": $\lim_{x\to a}\big(c\,f(x)\big) = c\,\lim_{x\to a} f(x)$.

Notas

- Para fazer a conta, a deve ser sempre o mesmo (não cancele com expressão em cima!) e os limites de f, g devem existir.
- No caso do quociente, o limite de g deve (existir e) ser $\neq 0$.
- Ainda não contemplamos $f(x)^{g(x)}$.

Também essas regras devem ser demonstradas usando a definição formal de limite. O argumento para a soma, embora simples, é bastante comum em Análise, então o vejamos:

Supomos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

para chegarmos em

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = L+M.$$

Dado $\varepsilon>0$, existem $\alpha,\beta>0$ tais que

$$0<|x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-L|<\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ e}$$
$$0<|x-a|<\beta \Rightarrow |g(x)-M|<\tfrac{\varepsilon}{2};$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

de fato, escrevemos α, β em vez de δ e aplicamos a definição de limite ao caso particular de $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ (no lugar de ε). Agora, tome $\delta = \min\{\alpha, \beta\} > 0$: se $0 < |x-a| < \delta$ então ambos os casos acima estão satisfeitos, de modo que

$$\big|\big(f(x)+g(x)\big) - (L+M)\big| \leqslant |f(x)-L| + |g(x)-M| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

onde usamos a desigualdade triangular. O mesmo raciocínio vale para a subtração: como devemos alterar os sinais?

O caso do produto é mais convoluto e requer mostrar, antes, que f é limitada ao redor de a, isto é, a existência do limite implica na existência de uma constante K e de uma vizinhança V de a onde $\big|f|_{V\setminus\{a\}}\big| < K$. (Observe isso graficamente.) Então se escreve

$$\begin{aligned}\big|f(x)g(x) - LM\big| &= \big|f(x)(g(x)-M) + (f(x)-L)M\big| \leqslant \\ &\leqslant \big|f(x)(g(x)-M)\big| + \big|(f(x)-L)M\big| < \\ &< K|g(x)-M| + M|f(x)-L|.\end{aligned}$$

Livros de Cálculo trazem uma demonstração completa desse caso e do quociente.

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to\pi}(x^2+\cos x) = \lim\limits_{x\to\pi} x^2 + \lim\limits_{x\to\pi}\cos x = \pi^2 + \cos\pi = \pi^2 - 1.$
- $\lim\limits_{t\to-2}(t^3 5^t) = \big(\lim\limits_{t\to-2} t^3\big)\big(\lim\limits_{t\to-2} 5^t\big) = (-2)^3 5^{-2} = -\frac{8}{25}.$
- $\lim\limits_{x\to1}\big(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1-x}\big) \not\equiv \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1} + \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}$ porque esses limites não existem; temos

$$\lim_{x\to1}\Big(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1-x}\Big) = \lim_{x\to1}\Big(\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x-1}\Big) = \lim_{x\to1} 0 = 0.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{t^2+6t}{t^2+3t}\right) \not\equiv \dfrac{\lim_{t\to 0}(t^2+6t)}{\lim_{t\to 0}(t^2+3t)}$ porque o denominador é 0; temos

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2+6t}{t^2+3t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cancel{t}(t+6)}{\cancel{t}(t+3)}\right) = \frac{\lim_{t\to 0}(t+6)}{\lim_{t\to 0}(t+3)} = \tfrac{6}{3} = 2.$$

- $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x-2-x^2} = \lim_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(1-x)} = \dfrac{\lim_{x\to 2}(x-3)}{\lim_{x\to 2}(1-x)} = 1.$

- $\lim_{a\to -1}\dfrac{a^3+1}{a+1} = \lim_{a\to -1}(a^2-a+1) = 3.$

Na prática, portanto, trata-se de eliminar qualquer fator que impeça a conta: se $x \to 2$, procuramos cancelar qualquer $x-2$ no denominador para não "dividir por zero". (Lembre-se, no último exemplo, de que podemos reciclar o significado das letras...)

Exercício

Calcule:

- $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2-4t+4}{t^2-2t}$;[a]
- $\lim_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}$;[b]
- $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.[c]

No último exercício, note que o limite é tomado quanto a h; carregue x em seus cálculos como uma constante desconhecida.

Procure mais exercícios nos livros-texto porque praticar, neste momento, é fundamental! Observe que, em todos esses cálculos, não se usou a definição formal com ε e δ. Sempre que possível, evite tentar o uso direto da definição, aplicando apenas as regras operacionais e os limites já conhecidos de funções. Por outro lado, embora se possa determinar o valor de um limite por intuição, nos termos de "quando x está pertinho de a vemos que $f(x)$ está pertinho

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

desse L", isso pode dar muito errado. *Para calcular um limite rigorosamente, é preciso fazer cálculos como nos exemplos.*

Composições

"Passe função para fora":

Se existe $M = \lim_{x\to a} g(x)$ e se $\lim_{u\to M} f(u) = f(M)$ então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\big(\lim_{x\to a} g(x)\big).$$

Exemplos

- $\lim_{x\to -\sqrt{\pi}} \cos(x^2) = \cos\big(\lim_{x\to -\sqrt{\pi}} x^2\big) = \cos\pi = -1.$
- $\lim_{y\to 4} \exp(20-5y) = \exp\big(\lim_{y\to 4}(20-5y)\big) = e^{20-5\cdot 4} = 1.$

Ou seja, se a função "externa" é contínua (como estudaremos a seguir) no ponto necessário, então podemos passar o limite "para dentro" caso, é claro, ele possa ser calculado. Pospomos a demonstração disso para a situação análoga em que "composta de contínuas é contínua".

A utilidade desse fato reside em estender imensamente a lista das funções para as quais sabemos calcular limites. Antes, enumeramos polinomiais, trigonométricas, exponenciais, etc., mas a função $\cos(x^2)$ não é nenhuma delas. Agora, podemos percebê-la como uma função composta e tratar primeiro do cosseno (com o qual sabemos lidar), depois com o polinômio quadrado.

Exercício

Calcule:

- $\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{sen}\big(2\pi - \cos^{-1}(\operatorname{sen}\theta)\big)$;[a]
- $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}$.[b]
- $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+1}-\sqrt{1-t}}{t}$.[c]

Preliminar © 2015 Vinicius C. L.

Exercício

Considere estas funções:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0, \\ -1 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 3, \\ 1 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Monte os gráficos de f, g e determine:

- $g(f(0))$;[a]
- $\lim_{x\to 0} f(x)$;[b]
- $g(\lim_{x\to 0} f(x))$;[c]
- $\lim\limits_{[u\to \lim_{x\to 0} f(x)]} g(u)$;[d]
- $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.[e]

Repita o procedimento para $f(x) = x + 3$ e mesma g.[f]

3.5 Definição II e a formulação com vizinhanças

O fundamento da redação a seguir é idêntico ao da Definição I, mas trabalha com pontos de acumulação, o que nos permitirá tratar de domínios ainda menos comportados:

Suponha $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ e a pto. acumulação de D.
Então: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A propriedade enunciada com ε e δ é exatamente a mesma da definição anterior.

Agora, porém, exigimos apenas que a seja ponto de acumulação de D, o que inclui (mas não se restringe a) as situações de pontos interiores e "interior perfurado" de D na Definição I. Isso nos permite calcular limites nos extremos (laterais) de um intervalo ou em domínios mais complicados,

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

como faremos a seguir, mas assim abrimos mão do "espaço ao redor de a" onde podíamos calcular f.

Não podemos generalizar mais: é preciso que a seja ponto de acumulação de D para que, por menor que sejam ε e consequentemente δ, existam pontos de D em $]a-\delta, a+\delta[$ distintos do próprio a onde possamos calcular f. Caso tais pontos não existissem, a implicação seria trivialmente satisfeita e qualquer L seria limite de f em a, o que não interessa.

Mesmas regras de cálculo e lista de funções com $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e que "passam para fora do lim".

Exemplo: Limites laterais

(Gráficos de saltos na lousa.)

notação	use que	domínio	diz-se
$x \to a^+$	$x > a$	$D \cap]a, \infty[$	lim. lateral à direita
$x \to a^-$	$x < a$	$D \cap]-\infty, a[$	lim. lateral à esquerda

(Anote claramente a desigualdade usada.)

Por exemplo:

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1;$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -1 = -1;$
- não existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

Assim, como já havíamos indicado acima que podemos calcular os limites das funções sen^{-1} e $\cos^{-1}$ em $-1 \leqslant a \leqslant 1$, o modo correto de expressar cálculos no caso dos dois extremos ± 1 é utilizar limites laterais com $x \to -1^+$ e $x \to 1^-$.

Alguns autores usam as abreviações $f(a^\pm) = \lim_{x\to a^\pm} f(x)$, mas isso não significa que inventaram novos números $a^\pm$!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Calcule:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1+|1-x|}{x-1}$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1+|1-x|}{x-1}$;[a]
- $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{(t^2)}}{t}$ e $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt{(t^2)}}{t}$;[b]
- $\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{x+2}$ — fala-se em $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{x+2}$?[c]

Procure mais exercícios para praticar!

Suponha $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ e a pto. int. de $D \cup \{a\}$.
Então: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow$

- $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e
- $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e
- eles são iguais; esse é o valor de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(O slide refere-se a limites reais. Contudo, quando estudarmos limites infinitos, se ambos $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ são o mesmo ∞ ou $-\infty$, então também $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ou $-\infty$, respectivamente.)

Exemplo-exercício

Faça os gráficos destas funções e mostre que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, mas que não existem $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 2; \\ x+1 & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 2, \\ x^2 & \text{se } x > 2; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 2, \\ (x-2)^{-1} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Formulação com vizinhanças

No contexto da Definição II, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ equivale a:

Para qualquer vizinhança U de L, existe viz. V de a tal que

$$V \cap D \setminus \{a\} \subseteq f^{-1}[U].$$

Note que a inclusão exibida pode ser reescrita como $f[V \cap D \setminus \{a\}] \subseteq U$.

Discussão extraordinária: Para demonstrar a equivalência, assuma primeiro que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e suponha U dada. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\subseteq U$. Encontre agora $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in D)\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Desse modo, se $x \in D \cap]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$ então $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\subseteq U$. Portanto, se tomarmos V como a vizinhança $]a-\delta, a+\delta[$ de a, teremos $f[V \cap D \setminus \{a\}] \subseteq U$.

A recíproca é análoga, bastando trabalhar, para dado $\varepsilon > 0$, com a vizinhança $U =]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ de L e, sendo V a vizinhança correspondente de a, usar $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a+\delta[\subseteq V$.

Note também que $V \cap D$ é uma vizinhança induzida em D. Essa formulação em termos de vizinhanças já vale para os pontos a como na Definição I e, em particular, quando D é um conjunto aberto. Neste caso, as vizinhanças induzidas no subespaço D são as próprias vizinhanças na reta real que estão contidas em D. □

3.6 Limites nos infinitos e de sequências

A Definição II e sua formulação equivalente permitem-nos deduzir as definições de limites nos pontos infinitos e para sequências (e, futuramente, limites infinitos), não como coisas novas, mas como manifestações de um mesmo conceito.

Para esses casos, também valem as regras de cálculo que já começamos a estudar. O porquê delas valerem, porém, merece uma breve discussão: A Definição II refere-se apenas a pontos de acumulação *reais* do domínio da função e usa intervalos de raio δ centrados nesses pontos; portanto, qualquer proposição que se deduza para esse tipo de limite está restrito a essa classe de pontos. Já a formulação usando vizinhanças pode ser literalmente interpretada em qualquer situação na qual se possa usar vizinhanças; assim, as

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

demonstrações que usem vizinhanças e baseiem-se apenas nas propriedades destas valerão também para essas novas situações.

Vejamos: Desejamos determinar o que significa L ser o limite de f quando $x \to \infty$. Adaptamos a formulação com vizinhanças: para qualquer vizinhança U de L, deve existir uma vizinhança V de ∞ tal que $V \cap D \subseteq f^{-1}[U]$. (Não é preciso subtrair $\{\infty\}$ porque D já não contém ∞.) Assim:

Lembre: ∞ é pto. acum. de conjuntos não-majorados; vizinhança de ∞ deve conter $]K, \infty]$ para algum $K \in \mathbb{R}$.

Suponha D ilimitado superiormente, $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$.

Então: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\, x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Analogamente para $x \to -\infty$ e D ilimitado inferiormente.[a])

(Gráficos com/sem assíntota na lousa; caso sen, cos.)

Ainda se pensa em ε por menor que seja, mas quanto a K não se intenciona que ele seja pequeno. No caso de ∞, existe esse K *suficientemente grande* para que, a partir dele, ocorra o que se quer. No caso de $-\infty$, ele será *suficientemente grande no sentido negativo* para que, antes dele, ocorra o que se quer. Em particular, pode-se assumir que a variável é diferente de um conjunto finito de valores e intervalos limitados que sejam problemáticos (raízes de denominadores, por exemplo).

Em particular, suponha $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $L \in \mathbb{R}$.

Como $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, temos: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)\, |s_n - L| < \varepsilon.$$

(Esquemas na lousa: gráfico de função *versus* acumulação na reta.)

Atenção: Limite de sequência é ponto de acumulação *ou* ponto eventual; não vale recíproca.

(Note que só se considera $n \in \mathbb{N}$ para que se possa calcular s_n.)

Quando existe o limite de uma sequência, diz-se que ela é *convergente;* caso contrário (a sequência "explode" para cima ou para baixo, ou ainda "fica pulando"), diz-se *divergente.*

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Mesmas regras de cálculo e lista de funções que "passam para fora do lim".

Fatos adicionais para cálculos

(Represente graficamente.)

- $\lim_{x\to\pm\infty} c = c$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ para $k \in \mathbb{N}^{\neq 0}$;
- $\lim_{x\to-\infty} b^x = 0$ quando $b > 1$;
- $\lim_{x\to\infty} b^x = 0$ quando $0 < b < 1$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{tg}^{-1} x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Exemplos

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^2+4}{7x-3x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{9+\frac{4}{x^2}}{\frac{7}{x}-3} = \dfrac{\lim_{x\to\infty}(9+\frac{4}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(\frac{7}{x}-3)} = \dfrac{9}{-3} = -3.$
- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-11x}{12x^3-3x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{5}{x}-\frac{11}{x^2}}{12-\frac{3}{x}} = \dfrac{\lim_{x\to\infty}(\frac{5}{x}-\frac{11}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(12-\frac{3}{x})} = \dfrac{0}{12} = 0.$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) \not\equiv \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\not 2}}(1+2+\ldots+\not n)$; temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Em todos esses exemplos, utilizamos o "truque prático para funções racionais", que são quocientes de polinômios: primeiro determinamos qual é a maior potência que aparece em toda a fração (seja em cima ou em baixo) e, então, dividimos ambos numerador e denominador pela mesma.

Como anteriormente, caso você obtenha 0 no denominador, outras técnicas deverão ser utilizadas. (A Parte "Uma Variável" tratará disso.) Simultaneamente, um numerador não-nulo indica que o limite não existe.

Pode-se aplicar a intuição para estimar limites, assim: "$12x^3-3x^2$ (cubo) cresce mais rápido que $5x^2-11x$ (quadrado) e o quociente acima vai a

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

zero". Contudo, há muita coisa que pode dar errado nisso. *Para calcular rigorosamente um limite, é preciso fazer conta como nos exemplos.*

Exercício

Calcule:

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$;[a]
- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(x-6)^2(1-8x)^3}{x^5+2x+1}$;[b]
- $\lim_{y\to\infty} \dfrac{2}{y^2+y|y|+1}$ e $\lim_{y\to-\infty} \dfrac{2}{y^2+y|y|+1}$;[c]
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$.[d]

Mais uma vez, praticar com mais exercícios é importante!

3.7 "Limites infinitos"

Uma possibilidade, quando não existe o limite de uma função, é que ao redor do ponto em questão a função assuma valores ilimitados, mas sem oscilação. Esse é o chamado "limite infinito" e usa-se a notação $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$, conforme a situação), mas ainda se diz que "o limite não existe".

Mais do que mera notação, esses "limites" (1) identificam situações importantes dentre aquelas de inexistência do limite real e (2) são úteis nos cálculos intermediários de limites bem reais, como você já pode ter encontrado em sua prática. Não os confunda com os limites nos pontos infinitos ($\pm\infty$) que vimos antes!

Suponha $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e a pto. acumulação de D.
Então: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow$

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

(Gráfico na lousa; compare $1/|x|$, $1/x$, $\operatorname{sen}(1/x)$.)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Como o limite não é real, ainda se diz "limite *não* existe".
Formulação obtida considerando-se vizinhanças de ∞.
Definição análoga para $-\infty$.[e]
Definições análogas para quando $x \to \pm\infty$.[f]

Regras de cálculo

No mesmo $a \in [-\infty, \infty]$, sendo $L \in \mathbb{R}$:

- $f, g \to \pm\infty$ (*ambos com mesmo sinal*) $\Rightarrow (f+g) \to \pm\infty$;
- $f \to L$ e $g \to \pm\infty \Rightarrow (f+g) \to \pm\infty$;
- $f \to \infty$ e $g \to -\infty$: não conclui direto sobre $f+g$.
- $f, g \to \infty \Rightarrow (f \times g) \to \infty$, com regras de sinais usuais;
- $f \to L > 0$ e $g \to \pm\infty \Rightarrow (f \times g) \to \pm\infty$, analog. $f \to L < 0$;
- $f \to 0$ e $g \to \pm\infty$: não conclui direto sobre $f \times g$;

- $f \to \pm\infty$ e $g \to L > 0 \Rightarrow (f/g) \to \pm\infty$, analog. $g \to L < 0$;
- $f \to L$ e $g \to \pm\infty \Rightarrow (f/g) \to 0$;
- $f \to L > 0$ e $g \to 0^{\pm} \Rightarrow (f/g) \to \pm\infty$, analog. $f \to L < 0$;
- $f, g \to \infty$: não conclui direto sobre f/g;
- $f, g \to 0$: não conclui direto sobre f/g.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fatos adicionais para cálculos

(Represente graficamente.)

- $\lim_{x\to\pm\infty} |x| = \infty$;
- $\lim_{x\to\infty} x^r = \infty$ quando $r > 0$;
- $\lim_{x\to-\infty} x^k = (\pm 1)^k \infty$ para $k \in \mathbb{N}^{\neq 0}$;
- $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x^k} = (\pm 1)^k \infty$ para $k \in \mathbb{N}^{\neq 0}$;
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[k]{x} = \infty$ para $k \in \mathbb{N}^{\neq 0}$;
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[k]{x} = -\infty$ para k ímpar;

- $\lim_{x\to\infty} b^x = \infty$ se $b > 1$;
- $\lim_{x\to-\infty} b^x = \infty$ se $0 < b < 1$;
- $\lim_{x\to\infty} \log_b x = \infty$;
- $\lim_{x\to 0^+} \log_b x = -\infty$ se $b > 1$;
- $\lim_{x\to\infty} \log_b x = -\infty$;
- $\lim_{x\to 0^+} \log_b x = \infty$ se $0 < b < 1$;
- $\lim_{x\to\pm\pi/2} \operatorname{tg} x = \pm\infty$.

Continuaremos não fazendo conta com $\pm\infty$. Porém, o modo usual de apresentar as novas regras necessárias para o cálculo de limites infinitos é utilizar abreviaturas, como você pode encontrar em livros. Ei-las aqui: $(\pm\infty)+(\pm\infty) = \pm\infty$, $L \pm \infty = \pm\infty$, $(\pm\infty)\times(\pm\infty) = \infty$, $(\pm\infty)\times(\mp\infty) = -\infty$ (as mesmas regras de sinais aplicam-se caso um multiplicando é real não-nulo), $L/\infty = 0$ e $\infty/L^{>0} = \infty$ (idem).

Não existem regras fixas para os seguintes casos indeterminados: $\infty - \infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$. Como veremos nos exemplos, esses casos podem ter respostas

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

variadas. Algumas técnicas que estudaremos em "Análise Básica" permitirão determinar limites desses tipos em diversas situações, estabelecendo-se limitações para um dos fatores ou usando-se a chamada "regra de l'Hospital".

Vamos ver o que já sabemos fazer:

Exemplos

- $\lim_{t\to\infty}(3t-7t^2+1) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{t^2}_{\to\infty}\underbrace{(\frac{3}{t}-7+\frac{1}{t^2})}_{\to -7} = -\infty$.
- $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$ porque $(1/x)\to\infty$.
- $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $(1/x)\to -\infty$.

- $\lim_{t\to 2^\pm} \dfrac{t}{2-t} = \lim_{t\to 2^\pm} \dfrac{1}{\frac{2}{t}-1} = \mp\infty$ porque

  $(\frac{2}{t}-1) \xrightarrow{t\to 2^\pm} 0^\mp$, isto é, $\begin{cases} 2<t\to 2 \Rightarrow 0>(\frac{2}{t}-1)\to 0 \text{ e} \\ 2>t\to 2 \Rightarrow 0<(\frac{2}{t}-1)\to 0. \end{cases}$

- $\lim_{y\to\infty}\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y}\right) \not\equiv \infty-\infty$; desracionalizando,

  $$\lim_{y\to\infty}\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y}\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}} = 0$$

  porque $\sqrt{y+1}+\sqrt{y}\to\infty+\infty=\infty$.

- $\lim_{x\to\infty}(x+(15-x)) = 15$, da forma $\infty-\infty$.
- $\lim_{x\to\infty}(-32x^2)(x^{-3}) = 0$, da forma $\infty\times 0$ ou ∞/∞.
- $\lim_{x\to\infty}(9x^2)(x^{-2}) = 9$, da mesma forma!
- $\lim_{x\to\infty}(-7x^2)(x^{-1}) = -\infty$, da mesma forma!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Calcule:

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$;[a]
- $\lim_{a\to\infty} \dfrac{a^2-5a+1}{3a+7}$;[b]
- $\lim_{t\to 5^+} \dfrac{5t-t^2-11}{t^2-25}$;[c]
- $\lim_{t\to 5^-} \dfrac{5t-t^2-11}{t^2-25}$.[d]

Agora, já conhecemos todos os tipos de limites, em pontos reais e nos infinitos, com valores reais (quando o limite existe) e infinitos (casos particulares de quando o limite não existe). Também aprendemos a calcular alguns limites, embora não haja um procedimento específico para aplicar regras; além disso, há ocasiões em que elas não informam se o limite não existe.

Essas são várias preocupações genuínas. Tentaremos alargar nosso conhecimento sobre a teoria dos limites um pouco mais, a fim de sabermos calcular mais alguns deles, pelo restante deste capítulo. Mesclaremos conhecimentos teóricos e práticos.

3.8 Confronto, sanduíche ou *squeeze*

Este é um resulado teórico que nos permite determinar o limite de uma f complicada quando podemos limitá-la por α e β mais simples. Ele também é usado para demonstrar a continuidade de várias daquelas funções listadas anteriormente.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Teorema

Suponha $a \in [-\infty, \infty]$ e V viz. de a. Assuma α, f, β definidas em $V \setminus \{a\}$ satisfazendo $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$. Assim:

- se $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = L$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$;
- se $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \infty$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$;
- se $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = -\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Corolário

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g *limitada* numa viz. de $a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = 0$.
Porque, se $|g| \leqslant K$, então $-K|f| \leqslant fg \leqslant K|f|$.

(Não podemos escrever simplesmente $-Kf \leqslant fg \leqslant Kf$ porque f pode ser negativa em alguns pontos!)

Um segundo corolário, análogo a esse, diz que quando $f \to \pm\infty$ e $g \geqslant \varepsilon > 0$ temos $(f \times g) \to \pm\infty$, ou quando $f \to \pm\infty$ e $g \leqslant \theta < 0$ temos $(f \times g) \to \mp\infty$, onde ε, θ são constantes. Você consegue mostrar essas duas implicações invocando o Teorema do Confronto?[a]

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ porque $|\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leqslant 1$ e $x \to 0$. (Gráfico na lousa.)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ porque

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n}\right)}_{n-1 \text{ termos} \leqslant 1} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0.$$

Exercício

Calcule:

- $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ — faça o gráfico da função;[b]
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2 - \operatorname{sen}(n!)}{3n^2 + 4}$.[c]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

3.9 Funções monótonas e o número e

Assim como o Teorema do Confronto nos permitiu determinar alguns limites sem aplicar diretamente as regras de cálculo, tanto ele como o resultado a seguir permitem-nos determinar a existência de um limite sem determinar seu valor específico: é o que exemplificaremos com a definição do número e.

Temos $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Note que $\sup D$ e $\inf D$ são pts. acum. de D.
Então:

monotonia de f	$x \to \inf D$	$x \to \sup D$
crescente	$f(x) \to \inf \operatorname{Im}(f)$	$f(x) \to \sup \operatorname{Im}(f)$
decrescente	$f(x) \to \sup \operatorname{Im}(f)$	$f(x) \to \inf \operatorname{Im}(f)$

Isso nos permite fazer conta teórica com alguns limites.

Por exemplo, quando f é *decrescente,* temos

$$\lim_{x \to \sup D} f(x) = \inf \operatorname{Im}(f) = \inf \{\, f(x) \mid x \in D \,\} = \inf_{x \in D} f(x).$$

Trata-se de um limite lateral à esquerda, porque quando $x \in D$ temos $x \leqslant \sup D$.

Note que essa descrição inclui possibilidades de limites nos pontos infinitos e "limites infinitos": Se D é majorado, então $\sup D \in \mathbb{R}$, do contrário $\sup D = \infty$; uma análise similar se faz de $\inf D$. Se f é limitada superiormente, existe o limite; caso contrário, trata-se de um "limite infinito".

Lembramos também que essa proposição aplica-se a sequências numéricas, como caso particular de funções.

Finalmente, podemos aplicá-la a uma função que é monótona apenas em um subconjunto de seu domínio que, porém, contém o ponto de interesse, tomando sua restrição a esse subdomínio.

Para a discussão a seguir, convém conhecer e revisar o enunciado do Teorema Binomial na página 49.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo: e

A sequência $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\geqslant 1}$ é majorada e crescente: veja texto!
Então existe

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n = \sup_{n\in\mathbb{N}^{\neq 0}}(1+\tfrac{1}{n})^n.$$

Sabe-se de fato $e = 2{,}718\ldots$

Assim, definimos um número real por meios puramente teóricos e sem explicitar sua expansão decimal completa. (Sabe-se, realmente, que e é um número transcendental, isto é, irracional e que não é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.) Esse número é importantíssimo para o Cálculo em vista de seu envolvimento em alguns limites fundamentais que estudaremos a seguir.

Acompanhe estes cálculos com atenção, a título de prática, e dirima quaisquer dúvidas que surgirem!

Começamos mostrando o majoramento:

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(\tfrac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\cdot\frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\Big(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\Big)}_{k\text{ termos}\leqslant 1}\cdot\frac{1}{k!}\leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant 1+1+\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.\end{aligned}$$

Note que, portanto, teremos $e\leqslant 3$.

Para mostrar que $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\geqslant 1}$ é crescente, suponha $m>n$. Então, para todo inteiro i entre 1 e n, temos $1-\frac{i}{n}<1-\frac{i}{m}$. Já que

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n} = \prod_{i=0}^{k-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

e uma expressão análoga vale para m, temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) <$$
$$< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{m}\right) <$$
$$< \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{m}\right) = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

(A primeira desigualdade é obtida por comparação termo a termo; a segunda é consequência de somarmos mais termos positivos.) Observe que, tendo em vista o primeiro termo da sequência (com $n = 1$), concluíremos que $e \geqslant 2$.

Há outro modo de definir-se e, que alguns livros de Cálculo trazem (com demonstração de que é o mesmo e acima) e que pode ser obtido naturalmente quando se estudam séries de potências. Trata-se de considerar a sequência crescente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $s_n = \frac{1}{0!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ cujo limite também é e. Escrevem-se $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ e $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

3.10 Limites notáveis

Alguns limites de funções particulares, em pontos específicos, serão bastante utilizados no desenvolvimento do Cálculo, de modo que convém conhecê-los e fixá-los separadamente.

Os raciocínios que permitem calcular esses limites fazem uso das técnicas práticas e dos resultados teóricos que estudamos até aqui, assim como de outros limites que também são notáveis. Portanto, apresentaremos essas deduções também a título de exemplificação e exercício.

Alguns limites são úteis nos cálculos de outros limites.
Veremos e praticaremos isso nos próprios cálculos!

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (exercício de confronto).
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ porque

$$\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \xrightarrow{x\to 0} 1 \cdot \tfrac{0}{2} = 0.$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ já que se $x \in [n, n+1]$ então (veja texto)

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n\frac{n+1}{n}} \geqslant \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1\frac{n+1}{n+2}}$$

  e aplica-se confronto.

- $\lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$: com $x = -y$ temos

$$\left(1-\tfrac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\tfrac{x}{x-1}\right)^x = \left(1+\tfrac{1}{x-1}\right)^x = \left(1+\tfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\tfrac{1}{x-1}\right)$$

  e $x-1 \to \infty \Leftrightarrow y \to -\infty$.

Já mostramos que a função $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ é crescente em $\mathbb{N}^{\neq 0}$, mas para o que precisamos a conta é mais elaborada. Com $n \leqslant x \leqslant n+1$ temos $1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} \geqslant 1+\frac{1}{n+1}$; elevando a potências também descrescentes, vem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$. Desse modo,

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \geqslant \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

e basta substituir $1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ e $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-1}$. Agora, para invocarmos corretamente o Teorema do Confronto, para cada x seja $n(x)$ o maior inteiro ainda menor ou igual a x. Então $n(x)$ é uma função de x; temos $x \in [n(x), n(x)+1]$ e $\lim_{x\to\infty} n(x) = \infty$; substituindo $n = n(x)$, as três expressões do slide são funções de x.

- $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ com $x = (1/t) \xrightarrow{t\to 0^{\pm}} \pm\infty$ separadamente.

- $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$: com $u = e^t - 1$ temos $t = \ln(1+u)$ e

$$\frac{e^t-1}{t} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}} \to \frac{1}{\ln e}$$

  conforme $t \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos de uso em outros limites

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(12x)}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12}{7} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(12x)}{(12x)} = \frac{12}{7}$. (Temos $12x \to 0$.)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \pi \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = \pi$. (Temos $\pi/n \to 0$.)
- $\lim\limits_{y\to\infty} \left(1 + \dfrac{r}{y}\right)^y = \lim\limits_{y\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{y/r}\right)^{y/r}\right]^r = e^r$.
- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1 - e^{-t}}{\operatorname{sen} t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{e^t \operatorname{sen} t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} \cdot \dfrac{t}{\operatorname{sen} t} \cdot \dfrac{1}{e^t} = 1$.

Atenção: Nesse slide, com $y \to \infty$, o cálculo apresentado assume implicitamente que $r > 0$, quando então $(y/r) \to \infty$. Desse modo, também precisamos considerar separadamente o caso $r = 0$, quando não podemos tomar y/r, mas temos $\lim_{y\to\infty}(1+0)^y = 1 = e^0$, e o caso $r < 0$, para o qual $(y/r) \to -\infty$. Assim, o resultado tem a mesma forma para os três casos, mas o modo de obtê-la é diferente.

Veja que tratamos $12x$, π/n e y/r como "blocos" em termos dos quais os limites pedidos puderam ser escritos e calculados apenas com base em suas próprias convergências. Poderíamos, portanto, ter escrito $t = 12x$, substituído em $\operatorname{sen}(12x)/7x$ como $\frac{12}{7}\operatorname{sen}(t)/t$ *onde não há mais* x*, apenas* t*,* e concluído que, como $x \to 0$, também temos $t \to 0$ e invocado nosso primeiro limite notável para completar a conta. Em termos formais, isso está correto e não é mais que utilizar a continuidade de uma função para calcular o limite de outra função, composta dessa. Porém, é interessante realizar esse procedimento com as versões mais simples diretamente, em vez de uma substituição explícita, porque ele é muito utilizado em diversas partes do Cálculo e frequentemente aninhado (isto é, feito novamente dentro de si mesmo).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Calcule:

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;[a]
- $\lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(320y)}{\operatorname{sen}(41y)}$;[b]
- $\lim_{t\to 0} \dfrac{a^t-1}{t}$ para $a>0$;[c]
- $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.[d]

3.11 Concepção de limites por sequências

Este é outro modo de conceituar limites que responde às nossas dúvidas sobre aproximações quando começamos a investigar o assunto. Ele também pode ser utilizado para definir o limite de uma função real, requerendo porém que se defina preliminarmente o que é o limite de uma sequência.

Para $a, L \in [-\infty, \infty]$, temos $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\left(\forall s \in (\mathbb{R}^{\neq a})^{\mathbb{N}}\right) \lim_{n\to\infty} s_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(s_n) = L.$$

Isto é, para quaisquer passos (formando sequência) pelos quais aproximemos a (não sendo a), as f-imagens aproximam-se de L.

Do jeito escrito, esse slide refere-se a funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Como devemos reescrever para $f\colon D \to \mathbb{R}$ com $D \subseteq \mathbb{R}$, arbitrário?

Exigir que a sequência não tenha nenhum valor igual ao limite a reflete apenas a possibilidade de $L \neq f(a)$; no caso de funções contínuas (abaixo), veremos como o enunciado é simplificado.

Note que a definição de limite usando ε e δ requer apenas quantificadores $(\forall, \exists)$ sobre variáveis números reais (ε, δ, x). Já a caracterização por sequências no slide requer também uma quantificação sobre uma variável função (sequência), que corresponde a uma família de reais. Do ponto de vista da Lógica, isso é um tanto mais elaborado.

Para demonstrar a implicação direta, suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{n\to\infty} s_n = a$. Já trabalhamos, anteriormente, com a conclusão que

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\lim_{s_n \to a} f(s_n) = L$ tratando s_n como um "bloco" que converge a a. Rigorosamente, fazemos assim: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Para tal δ, existe também $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|s_n - a| < \delta$ quando $n \geqslant N$. Como assumimos que $s_n \neq a$, conclui-se que $n \geqslant N$ implica $|f(s_n) - L| < \varepsilon$.

Para a recíproca, apresentaremos um argumento e você deverá responder por que ele prova a implicação inversa. Assuma $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$, ou seja, há $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe x com $0 < |x - a| < \delta$ e ainda $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon$. Em particular, tomando-se $n \in \mathbb{N}^{\neq 0}$ e $\delta = 1/n$, chame esse x de s_n. Veja que cada $s_n \neq a$, porém temos $s_n \to a$ quando $n \to \infty$ porque $|s_n - a| < 1/n$, enquanto $f(s_n) \not\to L$ porque sempre $|f(s_n) - L| \geqslant \varepsilon$ que é um número fixo.

Essa discussão assumiu $a, L \in \mathbb{R}$. Como você trataria os outros casos?

3.12 Continuidade

Encerramos o capítulo com a noção de continuidade de funções, que já temos utilizado ao longo do texto para calcular diversos limites. O que fizemos foi dar uma lista de funções, ditas "contínuas", para as quais podíamos calcular limites por substituição. Essa é exatamente a definição que daremos agora:

> Para a real: f *é contínua em* a nos casos:
>
> - a é pto. isolado do domínio, *ou*
> - $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
>
> Diz-se que f é *contínua* se o for em todo ponto do domínio.
> (Casos contrários: *descontínua.*)

Para uma função ser contínua em um ponto, é preciso que, antes de mais nada, esse número pertença ao seu domínio — então ele deve também ser um número real —, para que faça sentido falar-se do valor da função nesse ponto.

É mera conveniência estética dizer que uma função é contínua nos pontos isolados de seu domínio. Em termos gráficos, nessa situação, não há "tubinho" para trabalhar-se e o gráfico, porque consiste de apenas um ponto em uma vizinhança, é uma "curva contínua" de modo muito trivial ou degenerado. Nesses pontos, de qualquer modo, não se pode calcular limite.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assim, funções cujos domínios somente contêm pontos isolados são sempre contínuas; por exemplo, toda sequência $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Os pontos do domínio que não são isolados devem, forçosamente, ser pontos de acumulação e, agora sim, podemo-nos perguntar — com nossa notação $f\colon D \to \mathbb{R}$ usual — se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, isto é, se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Note que removemos a condição $0 < |x-a|$, ou seja, considerar $x = a$, porque podemos calcular f em a (já que $a \in D$) e também porque nesse caso sempre temos $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Em termos da caracterização do limite por sequências, esse fato significa que f é contínua em a se e somente se

$$(\forall s \in D^{\mathbb{N}})\ \lim_{n\to\infty} s_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(a),$$

ou seja, a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ agora pode assumir o valor a uma, várias ou infinitas vezes.

Exercício

Qual deve ser $f(0)$ para que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x^{\neq 0}) = x^{-1} \operatorname{sen} x$, seja contínua?[a]

Existe valor $g(2)$ para que $g(x^{\neq 2}) = \chi_{[2,3]}(x)$, seja contínua?[b]

Propriedades

Consequências das regras de limites:

- f, g contínuas em $a \Rightarrow f \pm g$ e $f \times g$ contínuas em a;
- f, g contínuas em a e $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$ contínua em a;
- f, g contínuas em $a, f(a)$ resp. $\Rightarrow g \circ f$ contínua em a;
- temos lista de funções contínuas!

Chegou o momento de utilizarmos aqueles dois exemplos de funções patológicas. Os problemas no próximo slide são difíceis apenas em termos do que é necessário escrever; mais importante é entender o que eles estão dizendo. Você pode resolvê-los com a propriedade usando ε e δ. Para o segundo, a chave é observar que há tanto pontos racionais como irracionais arbitrariamente próximos de qualquer número real; quando este real é irracional, os racionais próximos a ele têm denominadores crescentes.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Mostre que

$$\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

não é contínua em nenhum ponto.

Mostre que

$$f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x = m/n \text{ reduzido}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é contínua precisamente nos pontos irracionais de $]0,1]$.

Discussão extraordinária: Como os diversos tipos de limite que estudamos, a noção de continuidade também pode ser formulada topologicamente, em termos de vizinhanças. De fato, $f\colon D \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$ se e somente se, para qualquer vizinhança U de $f(a)$, também $f^{-1}[U]$ é uma vizinhança de a induzida em D. Percorrendo-se todo o domínio com a, concluímos que f é contínua em D se e somente se, para qualquer aberto U, sua pré-imagem $f^{-1}[U]$ é um aberto induzido de D.

A primeira caracterização segue naturalmente da formulação com vizinhanças da Definição II e, por sua vez, implica na segunda. □

Discussão extraordinária: Finalmente, mencionamos que se uma função é contínua e seu domínio é compacto, então também sua imagem é compacta. Faremos uso fundamental disso em "Uma Variável" (Teorema de Weierstrass), quando buscarmos valores máximos e mínimos de uma função, porque ter certeza que eles existem é o que possibilita essa busca.

Eis outro caso de preservação: se uma função é contínua e seu domínio é conexo, sua imagem também é conexa. No contexto unidimensional em que trabalhamos, esse fenômeno relaciona-se estreitamente com o Teorema do Valor Intermediário que conheceremos na mesma parte. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 4

Introdução à Derivação

A derivação foi uma de nossas principais motivações para o desenvolvimento do conceito e do cálculo de limites, na forma de "velocidade instantânea" que apresentaremos agora. Além dessa interpretação mecânica, a derivação também tem um significado geométrico e diversas aplicações, sendo um assunto importante do Cálculo.

Este capítulo enfatiza a definição e as interpretações do conceito de derivada, bem como a dedução das derivadas das principais funções básicas e das regras de cálculo gerais, como um modo de compreender a relação desse conceito com as motivações oriundas do mundo natural. "Uma Variável" revisará as funções tabeladas e as regras de cálculo diretamente, para estudar os cálculos e as aplicações que, aqui, apenas serão indicados. (A derivação já será usada em "Análise Básica", para apresentar as Regras de l'Hospital juntamente com a teoria de limites.)

4.1 Motivação cinemática e definição

Velocidade média ao redor de t_0:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Velocidade instantânea? Queremos $t = t_0$, mas não podemos dividir por zero!

Solução:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Note que esse é um limite da "forma 0/0". Você não pode dividir por zero e, portanto, deve buscar outros modos para calcular esse limite!

Suponha $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ e a pto. interior de D.
Se existir (nº real!)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

diz-se que f *é derivável em a com derivada $f'(a)$.*

(Caso contrário, não se fala de $f'(a)$, mesmo no caso de "limite infinito".)

f é *derivável* se o for em todo ponto de D.

(Dizer que f é derivável, portanto, requer que todo ponto de D seja interior, isto é, que D seja aberto.)

Qualquer taxa de mudança é um exemplo de derivada. Assim, a velocidade instantânea de um ponto móvel como derivada de sua posição ao longo de uma trajetória é apenas o primeiro exemplo. Podemos considerar, também, a aceleração como derivada da função velocidade; a inflação como derivada do preço (também em função do tempo); a aceleração ou desaceleração da própria inflação; a taxa de expansão ou contração demográfica de uma população (digamos, em uma cultura de bactérias), etc.

Por exemplo, os físicos perceberam que a velocidade de desintegração do urânio, em cada instante de tempo, é proporcional à quantidade de urânio existente, ou seja, ao tamanho da amostra. Suponhamos que, em cada instante t, a amostra de urânio seja de quantidade $R(t)$ em uma medida adequada (quilogramas ou mols). Então a derivada $R'(t_0)$ é proporcional ao valor $R(t_0)$. A constante de proporção deverá ser negativa, porque $R'(t_0) < 0$ (é uma diminuição) enquanto $R(t_0) > 0$ (é uma quantidade).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos

- $f(x) = x^2$: temos

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a}(x + a) = 2a.$$

- $s(y) = \sqrt{y}$: temos

$$s'(a) = \lim_{y\to a} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{y - a} = \lim_{y\to a} \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

somente para $a > 0$.

- $g(x) = |x|$: temos

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0, \\ -1 & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

não deriv. em 0 porque $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \pm 1$.

(Lembre que, para o cálculo dos limites neste exemplo, podemos assumir x próximo de a, mas distinto. Assim, quando $a > 0$ ou $a < 0$ também adotamos $x > 0$ ou $x < 0$, respectivamente, porque não interessarão valores de x tão longe que pertençam ao outro semi-eixo.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Notas

Para funções de uma var., *derivável* e *diferenciável* são sinônimos.
Atenção! $f'(a) \not\equiv f(a)' = 0$.
Notações:

- $f'(a)$ que se lê "f-linha de a";
- $\dot{f}(a)$ quando a variável independente mede "tempo";
- $\dfrac{df}{dx}(a)$ para mostrar a variável com resp. à qual se derivou.

Esta notação vem de

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta f_{(\text{em } a)}}{\Delta x_{(\text{em } a)}}.$$

O correto uso da notação é importantíssimo! Veremos que a derivada de uma constante é zero, de modo que se $f(2) = -3$ então $f(2)' = (-3)' = 0$; porém, $f'(2)$ pode ser qualquer outro número.

Sinta-se à vontade para não utilizar a notação pontilhada $\dot{f}$. Quando o texto ou o exercício exigirem o uso do ponto, tome bastante cuidado com o que lê e com o que escreve: *tenha certeza de que o seu ponto é legível!*

Neste momento, a notação diferencial $\frac{df}{dx}$ é apenas um bloco ou "caixa preta", não uma fração. Assim, *não faz sentido* "passar dx multiplicando" e trabalhar isoladamente com df, dx. Isso será feito mais tarde, no tópico de integração, sob regras estritas.

Ponha $h = x - a$: temos $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$ e

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Isso facilita muitas contas.

Na prática, usa-se x (variável) em vez de a (ponto) porque se quer *função derivada* (futuramente).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$g(x) = e^x$: temos

$$g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^2 e^h - e^2}{h} = e^2 \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^2 \cdot 1 = e^2.$$

Exemplo

$x(t) = \operatorname{sen} t$: temos

$$\dot{x}(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3+h) - \operatorname{sen} 3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3 \cos h + \cos 3 \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 3}{h} =$$
$$= (\operatorname{sen} 3) \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + (\cos 3) \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} =$$
$$= (\operatorname{sen} 3) \cdot 0 + (\cos 3) \cdot 1 = \cos 3.$$

Observe na função seno, por exemplo, que utilizar a nova letra h foi muito mais fácil que trabalhar diretamente com o quociente $(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3)/(x-3)$.

Pratique bastante a derivação com h, procurando exercícios em seu livro de Cálculo! Caso a letra h seja o nome da função ou ocorra na expressão a ser derivada, experimente usar a letra η.

Exercício

Calcule as derivadas (se possível) em 0 e 1 usando limite:

- $f(x) = x^3$;[a]
- $s(t) = 1/t$;[b]
- $g(x) = e^x$;[c]
- $x(t) = \operatorname{sen} t$.[d]

Até aqui, utilizamos a própria definição de derivada por limite, ou uma transformação desse limite, para calcular derivadas. Em breve, veremos regras de cálculo que oferecem um *algoritmo* ("receita de bolo") para reduzir

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

o cálculo de derivadas ao das funções fundamentais. Estas serão listadas e convirá você memorizá-las.

Continuidade

Se f é derivável em a, então f é contínua em a. Prova:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

Ou seja: Função com salto não é derivável no salto.
Mas note: $|\cdot|$ é contínua, não é derivável em 0.

Esse critério de continuidade é útil para descartamos imediatamente várias "derivadas" impossíveis de calcular, mas também o aplicaremos em algumas demonstrações.

A próxima seção já o esclarecerá graficamente.

4.2 Interpretação geométrica

A derivação pode ser usada para determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função e, então, também a equação dessa reta. Para tanto, aqui, consideramos informalmente a reta tangente como um "limite" de retas secantes e justificaremos depois, em "Uma Variável", a equação obtida como sendo a melhor aproximação linear à função.

Caso o gráfico da função f tenha um "salto" justamente no ponto de interesse $(a, f(a))$, um caso em que f é descontínua em a, então não há reta tangente e, de acordo com a seção anterior, não há derivada em a.

Reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$: "limite de retas secantes". (Diagrama na lousa.)

Coeficiente angular da tangente: limite $f'(a)$.

Pontos (x, y) da tangente satisfazem $\dfrac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$, então a equação da reta é

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

(Cuidado com as letras x, y em cada caso!)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Note que o ponto $(a, f(a))$ é quem pertence ao gráfico da função e é por onde a reta tangente deve passar, não o ponto a no domínio da função (identificado com $(a, 0)$ no eixo das abscissas). Porém, é costume falar simplesmente da "tangente em a".

Dado um ponto (a, b) e uma função f, *verifique antes de mais nada* se (a, b) pertence ao gráfico de f, caso contrário, a equação do slide não se aplica! Essa verificação consiste em dois itens: (1) se a pertence ao domínio de f e (2) se $b = f(a)$. Além disso, obviamente, precisamos que f seja derivável em a.

Note também que outras letras podem ser utilizadas no lugar de x, y (como t, x) e que, agora, é preciso abandonar definitivamente o vício de escrever $y = f(x)$ para qualquer função que apareça, porque o y na reta não é o mesmo valor da ordenada $f(x)$ (estude o gráfico!).

Exercício

Determine as equações das retas tangentes em 0 e $\pi/3$:

- $f(x) = x^3$;[a]
- $s(t) = 1/t$;[b]
- $g(x) = e^x$;[c]
- $x(t) = \operatorname{sen} t$.[d]

4.3 Como calcular derivadas?

Agora, começaremos a ver como calcular derivadas. A definição por limite, embora importante para dar sentido às interpretações mecânica e geométrica da derivada, não é o melhor jeito de calculá-la. As regras de derivação que apresentaremos neste capítulo e a lista de derivadas de funções clássicas que construiremos, juntas, fornecem um *algoritmo* ("receita de bolo") para calcular a imensa maioria das derivadas de interesse. Praticar, porém, continua tão essencial como foi com os limites: procure exercícios adicionais no seu livro de Cálculo!

Até aqui, substituímos o valor de a na conta.
Agora, escreveremos x no lugar de a arbitrário.
Memorize as regras e as principais funções!

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se $g(x) = c$ constante, então $g'(x) = 0$.
Se $f(x) = x^r$ para constante $r \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = r\,x^{r-1}$.
Em particular, se $f(x) = x = x^1$ então $f'(x) = 1x^0 = 1$.

É fácil provar, usando a definição por limite, que a derivada de uma constante é zero!

Quando r é de fato um natural n, a regra vale para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e já sabemos demonstrá-la: fizemos cálculos explicitos quando n é 2 ou 3 e, em geral, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right) = nx^{n-1}.$$

Para uma potência arbitrária, a solução é escrever $x^r = \exp(r \ln x)$, expressão com a qual aprenderemos a lidar em breve.

Note que essa regra inclui raízes (transforme-as em expoentes fracionários) e a forma $1/x^k$ (transforme-a em x^{-k}). Em cálculos, convém sempre simplificar esses elementos, escrevendo-os como potências. *Quando a raiz é ímpar, vale para todo $x \in \mathbb{R}$; quando a potência é negativa, vale para todo $x \neq 0$.*

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$.
$g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\operatorname{sen} x$. (Cuidado com sinal!)
$h(x) = e^x = \exp x \Rightarrow h'(x) = e^x = \exp x$.

Já vimos como lidar com o seno e a exponencial de base e, utilizando limites notáveis. Quando ao cosseno, procedemos do mesmo modo:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Regras de cálculo

Para f, g ambas deriváveis em x:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (atenção!);
- $(c\,f)'(x) = c\,f'(x)$ para c constante;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ se $g(x) \neq 0$;
- $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ se $g(x) \neq 0$.

Cuidado com produto e sinais nos quocientes!

Como no caso de limites, as regras valem somente quando f, g são deriváveis. Por exemplo, $|x|$ não é derivável em 0, mas $0 = |x| - |x|$ é derivável (constante); o que não podemos escrever é $0' = |x|' - |x|'$.

Muito cuidado com as regras de derivação do produto e do quociente! É importante memorizar essas regras e aplicá-las corretamente.

Quanto a demonstrá-las, devemos usar a definição da derivada por limite, com foco no quociente de que se toma o limite. Para a soma, temos simplesmente

$$\frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Para o produto, usamos

$$\frac{[f(x+h) \times g(x+h)] - [f(x) \times g(x)]}{h} = \\ = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

conjuntamente com o fato de $g(x+h) \to g(x)$ quando $h \to 0$ porque função derivável é contínua.

A técnica para o quociente é mais importante, em termos científicos, e merece ser estudada: Escreva $u = f/g$, de modo que $f = gu$. Derivando ambos os lados desta igualdade, no mesmo ponto, temos $f' = g'u + gu'$. Desejamos determinar u' em termos apenas de f, g e suas derivadas, então substituímos $u = f/g$, obtendo $f' = g'f/g + gu'$. Agora, podemos isolar

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

u', resultando na expressão do slide! Há um porém: assumimos que u é derivável ao derivar gu. Para contornar isso, calcule primeiro a derivada de $1/g$ utilizando a definição de limite (experimente!); depois mostre que u é derivável usando a fórmula do produto para $u = f \times (1/g)$, o que já apresentará a fórmula do quociente.

Recapitulando: Para derivar uma soma de vários termos, derivamos cada termo e somamos. Para derivar um produto de vários fatores, derivamos cada fator, multiplicando-o pelos demais inalterados, e somamos tudo. (Ambas as regras, para um número finito de termos/fatores, seguem daquelas para dois termos/fatores, por indução!) Assim:

$$(f+g+h+s)' = f'+g'+h'+s',$$
$$(fghs)' = f'ghs + fg'hs + fgh's + fghs'.$$

Exemplos

- $f(x) = 7x^5 - 2\operatorname{sen} x + \pi e^x$: temos
$$f'(x) = 35x^4 - 2\cos x + \pi e^x.$$
- $g(x) = (e^x + x)\cos x$: temos
$$g'(x) = (e^x+1)\cos x + (e^x+x)(-\operatorname{sen} x).$$
- Derivada de expressão: temos
$$[(x^3+8\cos x)(2e^x - 3\sqrt[7]{x}+5)]' =$$
$$= (3x^2 - 8\operatorname{sen} x)(2e^x - 3\sqrt[7]{x}+5) + (x^3+8\cos x)(2e^x - \tfrac{3}{7}x^{-6/7}+0).$$

Onde escrevemos simplesmente $(u(x))'$ para significar $u'(x)$ com u subentendida, tome cuidado: Essa prática é comum nos livros, mas a variável (aqui, x) deve estar livre. Se tomar algum valor, então a derivada é zero, porque a imagem é constante: se $u(x) = \operatorname{sen} x$ então $u'(3) = \cos 3$, mas $(\operatorname{sen} 3)' = 0$.

Portanto, para calcular a derivada de f em algum ponto específico a usando as regras práticas, primeiro determine $f'(x)$ em geral, depois substitua o valor de a em $f'(a)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $x(t) = -3t^5 \cos t + \frac{6}{t^3} e^t - \sqrt[9]{t^4} e^t \cos t$: temos

$$\dot{x}(t) = (-15t^4 \cos t + 3t^5 \operatorname{sen} t) + (-\tfrac{18}{t^4} e^t + \tfrac{6}{t^3} e^t) - \\ - \big(\tfrac{4}{9} \sqrt[9]{\tfrac{1}{t^5}} e^t \cos t + \sqrt[9]{t^4} e^t \cos t - \sqrt[9]{t^4} e^t \operatorname{sen} t\big).$$

- Memorize:

$$(\operatorname{tg} x)' = \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\Big)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Observe como foi mais fácil utilizar a regra do quociente para derivar $\operatorname{tg} x$ em vez de calcular $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x)$.

Note também que, em uma certa etapa, podemos simplificar a expressão de um modo diferente e obter $(\operatorname{tg} x)' = 1 + (\operatorname{tg} x)^2$, ou seja, a mesma resposta pode assumir várias formas, apesar do procedimento de derivação ser algorítmico. Nesse caso, vemos que $\operatorname{tg} x$ satisfaz $y' = 1 + y^2$, que é uma "equação diferencial ordinária"; essas equações serão estudadas em um curso específico.

Exercício
Derive:

- $\cot x$;[a] $\sec x$;[b] $\csc x$;[c]
- $2t^2 e^t + \frac{1}{t^4} \operatorname{sen} t - \sqrt[3]{t} \operatorname{tg} t$;[d]
- $(4e^x + 2/x^3)(3 \operatorname{sen} x)\sqrt[5]{x}$;[e]
- $\dfrac{5u \cos u}{\exp u + \operatorname{sen} u}$.[f]

Até aqui, as poucas expressões que sabemos derivar são apenas combinações de somas e produtos de algumas funções simples. A mesma Regra da Cadeia, que veremos agora, permitirá derivar mais funções básicas, inclusive suas inversas, e expressões concatenadas que constituem a vasta maioria das funções.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Regra da Cadeia

Se f, g são deriváveis em $x, f(x)$ resp., então

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).$$

Notas

- Detalhes para $g \circ f$ existir?
- Não esqueça de multiplicar pela "cauda" $f'(x)$!
- Na prática: comece a derivar "por fora".

A demonstração é um pouco extensa, embora nada demais, e você deve estudá-la em seu livro de Cálculo. Aqui, exploraremos uma idéia que não dá certo:

Para calcular o limite na definição de $(g \circ f)'(x)$, quando $h \to 0$, devemos supor $h \neq 0$ (como, de fato, podemos) para dividir por h. Suponhamos também que $f(x+h) \neq f(x)$, de modo que podemos "multiplicar em cima e embaixo por $f(x+h) - f(x)$". Então

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e a última fração converge para $f'(x)$ por hipótese. Como f é derivável em x, sua continuidade diz que $f(x+h) \to f(x)$ quando $h \to 0$ e, então, a primeira fração do membro direito converge para $g'(f(x))$.

Porém, assumimos que $f(x+h) \neq f(x)$, o que requer f injetora e pode estar longe de ser verdade: para $x+h$ mais e mais próximo de x, podemos ter $f(x+h)$ igual ou diferente de $f(x)$. A demonstração correta em um livro-texto elabora essa idéia, contornando a hipótese $f(x+h) - f(x) \neq 0$, embora na forma final ela pareça distinta.

Por indução, podemos derivar a composição de três ou mais funções:

$$(h \circ g \circ f \circ s)' = (h' \circ g \circ f \circ s) \times (g' \circ f \circ s) \times (f' \circ s) \times s'.$$

É esse encadeiamento de derivadas que você deve fazer.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos

- $[\operatorname{sen}(2\pi t)]' = \cos(2\pi t)\cdot 2\pi = 2\pi\cos(2\pi t)$.
- $[(x^6 - 11x^2 + 7)^4]' = 4(x^6 - 11x^2 + 7)^3 \cdot (6x^5 - 22x)$.
- $[\operatorname{sen}(-\operatorname{tg}(6\sqrt{x}))]' = \cos(-\operatorname{tg}(6\sqrt{x}))\cdot(-\sec^2(6\sqrt{x}))\cdot 3x^{-1/2}$.
- $(a^x)' = [\exp(x\ln a)]' = \exp(x\ln a)\cdot\ln a = a^x \ln a$ para base constante $a > 0$. (Memorize!)
- $f(x) = \cos(2^x - (3x^2-5)^9)$: temos

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(2^x - (3x^2-5)^9)\cdot\big(2^x\ln 2 - 9(3x^2-5)^8\cdot 6x\big).$$

Exercício

Derive:

- $\operatorname{tg}(x^3)$;[a]
- $\cos(\exp(\pi x))$;[b]
- $\dfrac{5(x^2-x)\cos(x^2-x)}{\exp(x^2-x)+\operatorname{sen}(x^2-x)}$ — o que você nota aqui?[c]
- $(\operatorname{tg}(5^{t^4+\operatorname{tg}(2\pi t)}))^7$.[d]

Em "Uma Variável", usaremos muito um método de "derivação implícita", derivando os dois lados de uma igualdade para obter derivadas de uma função da qual não temos uma expressão definidora, mas apenas uma relação. Exemplos disso serão os problemas de "taxas relacionadas".

Aqui, utilizaremos esse método apenas para deduzir fórmulas de derivação para as principais funções inversas. Assumiremos que essas funções também são deriváveis, para então aplicarmos a Regra da Cadeia. Os livros de Cálculo podem apresentar (ou omitir!) diversos resultados que garantem a derivabilidade dessas funções, sob várias hipóteses, sendo o "Teorema da Função Inversa" o mais importante.

Novamente, não confunda f^{-1} e $1/f$!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se f, f^{-1} são deriváveis em $x, f(x)$ resp. e $f'(x) \neq 0$, então

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(Detalhes para f^{-1} existir? Ser derivável?)

Razão: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, donde:

- $(f^{-1} \circ f)' = 1$ porque $x' = 1$;
- $(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$ por Cadeia.

Veja que não é preciso verificar que $f'(x) \neq 0$ *se já assumirmos* f^{-1} *derivável em* $f(x)$, porque isso é implicado pela expressão obtida usando-se a Regra da Cadeia: um produto igual a 1 requer que seus fatores sejam não-nulos.

Exemplos

- $(\ln x)' = 1/x$ (memorize!) porque

$$u = \ln x \Rightarrow e^u = x \Rightarrow e^u \cdot u' = x' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}.$$

- $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$ para base constante $0 < a \neq 1$. (Memorize!)

As fórmulas para as derivadas dos logaritmos costumam ser listadas assim: $(\ln|x|)' = 1/x$ e $(\log_a|x|)' = 1/x \ln a$. Desse modo, elas permitem definir e derivar as funções em todo $\mathbb{R}^{\neq 0}$. Para demonstrá-las, aplique a Regra da Cadeia a $\log_a(-x)$ quando $x < 0$: dois sinais negativos de multiplicação hão de cancelar-se.

Como você derivaria $\log_{f(x)} g(x)$?[a]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $(x^r)' = [\exp(r \ln x)]' = \exp(r \ln x) \cdot r(\ln x)' = x^r r\frac{1}{x} = r\, x^{r-1}$.
- Método geral para exponenciação:

$$\begin{aligned}[(f(x))^{g(x)}]' &= \big[\exp\big(g(x)\ln(f(x))\big)\big]' = \\ &= \exp\big(g(x)\ln(f(x))\big) \cdot \Big(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\tfrac{1}{f(x)}f'(x)\Big) = \\ &= (f(x))^{g(x)} \cdot \big(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)f'(x)/f(x)\big).\end{aligned}$$

(Não decore, use método.)

- $(\operatorname{sen}^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ porque (gráfico na lousa)

$$u = \operatorname{sen}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{sen} u \Rightarrow 1 = (\cos u) \cdot u' \Rightarrow u' = 1/\cos u = \ldots$$

- $(\operatorname{tg}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ porque (gráfico na lousa.)

$$u = \operatorname{tg}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} u \Rightarrow 1 = \frac{u'}{\cos^2 u} \Rightarrow u' = \cos^2 u = \ldots$$

Exercício

Derive:

- $\cos^{-1} x$;[a] $\cot^{-1} x$;[b] $\sec^{-1} x$;[c] $\csc^{-1} x$;[d]
- $\ln(12 - 3x^8)^5$;[e]
- $(2x^4 - 3\cos x)^{5x-3+\sqrt{2x}}$;[f]
- $\sqrt{t + \log_7(2^t + 2\pi \operatorname{sen}^{-1} t)}$.[g]

4.4 Outras interpretações

Terminaremos o capítulo conhecendo mais alguns usos da derivada, além das interpretações cinemática ("velocidade instatânea" ou "taxa de variação") e geométrica ("coeficiente da reta tangente"). Tanto os detalhes dessas aplicações, como ainda outras, veremos apenas em "Uma Variável".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Trabalharemos com D aberto e $f\colon D \to \mathbb{R}$ derivável.

Ponto crítico é $a \in D$ com $f'(a) = 0$ (ou onde f' não existir).

Extremos relativos (locais)

Objetivo: determinar "picos" e "vales" do gráfico, ou seja, máximos e mínimos locais (em vizinhanças) da função. (Discussão sobre localidade: compare picos do Jaraguá e do Everest.)

Fato: se a é ponto de máximo ou mínimo local, então a é crítico.

Motivação: retas tangentes com inclinação 0. (Gráfico na lousa.)

Método: resolver $f'(x) = 0$ e estudar cada raiz.

Tomamos D aberto para que todo ponto seja interior e possamos calcular a derivada.

O fato de $f'(a) = 0$ não implica que a seja ponto de máximo ou mínimo, como veremos no próximo slide. Porém, basta estudarmos as raízes de $f'(x) = 0$, *que incluem qualquer ponto de extremo relativo.* Essa restrição é válida somente porque assumimos f derivável em todo o aberto D.

Exemplos

Com domínio $\mathbb{R}$:

- $f(x) = x^3 - 3x$. (Gráfico na lousa.) Temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

  De fato, f tem "pico" em -1 e "vale" em 1.

- $g(x) = (x-2)^3 + 1$. (Gráfico na lousa.) Temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

  Contudo, g não tem extremo em 0.

Exercício típico

Temos arame farpado para montar uma cerca de 300 m. Queremos pasto retangular com área máxima. Quais as dimensões do pasto?[a]

Sugestão:

$$x + y + x + y = 300 \Rightarrow y = 150 - x \Rightarrow A = xy = 150x - x^2$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Enquanto aprendemos regras para calcular derivadas, começamos a trabalhar não apenas com o valor da derivada de uma função em um ponto, mas com a derivada de uma expressão como se fosse uma função, tendo também uma variável independente. Podemos formalizar isso, o que facilitará muitas considerações:

Função derivada e ordens superiores

Podemos definir $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, chamada *função derivada de* f e indicada simplesmente f'.

Estudar f' por conta própria: f' pode ser contínua *ou não,* derivável *ou não,* ...

Iterando-se: f'', f''', $f^{(4)}$, ...

(Cuidado para não confundir a indicação $\cdot^{(n)}$ com potência! Em termos de tempo, usam-se $\ddot{f}$ e $\dddot{f}$. A notação diferencial é $\frac{d^n f}{dx^n}$.)

Observar que temos uma função f' abre novas perspectivas para nós: podemos repetir tudo o que estudamos para derivadas também para f'. Aqui, veremos apenas uma aplicação para determinar as concavidades da f original. Contudo, atente para isto:

Para obter f'' e outras derivadas de ordem superior, derive a função sucessivamente. Assim, dada f, calcule primeiro f' (e escreva-a no papel!), depois calcule f'' (e escreva-a no papel!), etc. Não tente aplicar as regras de derivação repetidamente "de cabeça" e também não elabore limites com denominador h^n para $h \to 0$. (Há um exercício no livro de Rudin usando um limite assim, mas é muito específico.)

Eis alguns exemplos patológicos:

- $f(x) = x|x|$ tem $f'(x) = 2|x|$ que é contínua, mas não derivável.
- $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(x^{-1}) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ tem $g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(x^{-1}) - \cos(x^{-1}) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ descontínua. (A derivada em 0 deve ser calculada por limite.)

Exemplos bem mais patológicos, como funções contínuas não-deriváveis em ponto algum, podem ser construídos!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Concavidades

Suponha f duas vezes derivável:

- Se $f''(a) > 0$ então f é convexa (boca para cima) em a. (Gráfico na lousa.)
- Se $f''(a) < 0$ então f é côncava (boca para baixo) em a. (Gráfico na lousa.)
- Se $f''(a) = 0$, nada podemos dizer.

Especialmente nos pts. extremos: resp. mín., máx., possível inflexão.

Em outras palavras determinar a *segunda* derivada nos pontos extremos de f pode ajudar a revelar a natureza desses pontos como máximos ou mínimos locais. Experimente isso nos próximos exercícios:

Importante

Para o valor determinado no exercício anterior, a área é mesmo máxima, ou mínima?[a]

Exercício

Determine a concavidade em cada ponto crítico:

- $-7x^4 + 5x - 1$;[b]
- $\sqrt{t^2 + 1}$;[c]
- $x + \operatorname{sen} 2x$.[d]

Na próxima parte, os capítulos "Análise Básica", "Derivação" e "Otimização e Comportamento de Funções" estudarão mais profundamente o conceito de derivada, suas interpretações, cálculos e utilidades. A lista que apresentamos a seguir é um breve sumário desses tópicos:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Derivação em "Uma Variável"

- Mais aplicações com velocidades e otimizações.
- Tangente: melhor aproximação linear.
- Sinal da derivada: função crescente ou decrescente.
- Detalhes e regras sobre máximos e mínimos (locais e globais).
- Reunir com limites: gráficos.
- Regras de l'Hospital.
- Teorema do Valor Médio.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Parte II

Uma Variável

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 5

Análise Básica

"Análise" é o campo da Matemática abstrata em que se insere o Cálculo, agrupando os estudos que utilizam definições e argumentos com aproximações controladas, ou seja, as tolerâncias "ε e δ".

Este capítulo elabora os conceitos e os métodos apresentados em "A Estrutura dos Números Reais" e em "Introdução aos Limites". Em vez de repetir, buscamos revisar rapidamente o que já foi visto, mas fazemos novas elaborações e há tópicos inéditos, como as regras de L'Hospital e as séries de potências.

5.1 Lembretes

O número e será muito importante em nossos estudos; convém memorizar que se trata de um número transcendente entre 2 e 3 e, portanto, maior que 1.

- e é número especial com $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ e valor 2,718...;
- exp é função exponencial com base e, ou seja, $\exp(x) = e^x$;
- ln é a função logaritmo tomada na base e;
- ângulos são medidos em radianos.

(Em textos científicos, log pode não ser na base 10, mas sim em outra base de interesse no estudo, como e ou 2.)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Atenção

A mesma operação é usada para definir funções

- potências: x^2, x^3, x^{-1}, etc.
- exponenciais: 2^x, 3^x, $(\frac{1}{2})^x$, etc.
- e mais complicadas: x^x, $(x^2 - 5\operatorname{sen} x)^{\cos x - 7x^3}$, etc.

Essas funções têm propriedades e gráficos diferentes!
Portanto, *regras no Cálculo serão diferentes!*

Pontos infinitos

$\mathbb{R}$ e $]-1,1[$ são muito parecidos. (Escala na lousa.) De fato, $\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}(x)$ é bijeção crescente.

Mas $\mathbb{R}$ não tem começo nem fim, enquanto $]-1,1[\subseteq [-1,1]$.

Introduzimos dois novos símbolos ∞ e $-\infty$.

$-\infty$ antes de todos os reais: $-\infty < \ldots < -10^{400} < -3 < \ldots$

∞ depois de todos os reais: $\ldots < 1 < 200 < 10^{780} < \ldots < \infty$.

São abreviaturas: expressões podem ser reescritas usando somente n$\underline{\text{os}}$ reais.

Não são números, não fazem contas!

Em certas ocasiões, escreveremos $x \to a^{\pm}$ ou $y \to \pm\infty$. Isso significa apenas que estamos abreviando duas operações separadas em uma, utilizando a convenção de que uma delas corresponde ao sinal superior e outra ao inferior, em toda a notação. Por exemplo, $5-(\pm 3) = 5 \mp 3 = \begin{cases} 2 \\ 8 \end{cases}$ e *não se consideram ambos os sinais ao mesmo tempo,* ou seja, não se trata de ± 2 como "valor próximo de 2". Assim, veremos que:

- $\lim_{t\to 0^{\pm}} 1/t = \pm\infty$;
- não há $\lim_{t\to 0} 1/t$ (nem real, nem ∞, nem $-\infty$);
- $\lim_{t\to 0} 1/|t| = \infty$.

5.2 O que são limites e seus tipos

Uma apresentação pormenorizada, mais lenta e em seqüência mais natural é feita no Capítulo "Introdução aos Limites", na primeira parte.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Objetivo: entender comportamento de uma função fora (mas muito perto) do seu domínio, como

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{4x^7 + 2x^3 - x}$$

em $x = 0$.

Não podemos pôr o valor na fórmula, então **não** faremos contas $0/0$, $k/0$, ∞/∞, k^∞ etc.

Fixada uma função e seu domínio, calcularemos limites nos números que não estão "isolados" desse domínio. Formalmente, dizemos que um número a é *ponto de acumulação* de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ se, por menor que seja $\delta > 0$, existe um $x_\delta \in D$, que muda com δ e distinto de a, satisfazendo $|x_\delta - a| < \delta$. Note que o próprio a pode pertencer ou não ao conjunto D, mas como $x_\delta \in D$, sabemos calcular $f(x_\delta)$ e podemos estudar os valores de f nesses pontos cada vez mais próximos de a.

Portanto, não faz sentido perguntar $\lim_{x\to(-3)} \sqrt{x}$, porque a função raiz não está definida em números próximos de -3.

Lembre sempre: Não escreva nada como $0/0$ *ou* $-23/0$ *ou* $5/\infty$ *ou* $\infty \times 0$ *ou* 0^∞*... Não se fazem contas assim! Estudamos limites justamente para contornar esses obstáculos.*

Nesse exemplo, não podemos calcular $f(0)$.

Temos:

$$\frac{3x^2 - 5x}{4x^7 + 2x^3 - x} = \frac{3x - 5}{4x^6 + 2x^2 - 1}.$$

Agora podemos pôr 0 na fórmula: $\dfrac{-5}{-1} = 5$.

Escrevemos assim: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 5$.

É mais informação que simplesmente um número "$f(0)$".

Significado: x muito perto de 0 implica $f(x)$ muito perto de 5.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Todo conceito em Cálculo reduz-se a limites.
Exemplo central é a derivada:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{(forma } 0/0\text{)}$$

Importante: $x \to a$ assume $x \neq a$. (Anote ao lado, para usar nos cálculos.)

Em um exemplo típico de derivação, tentaremos considerar velocidades médias $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ ao redor de um instante t_0 para t cada vez mais próximo de t_0, mas não podemos colocar $t = t_0$ porque o denominador dessa fração seria nulo e não podemos dividir por zero.

Já quanto a integração, tentaremos exaurir áreas curvas usando figuras retangulares cada vez mais finas. Não podemos falar, infelizmente, de uma soma infinita de áreas de polígonos infinitamente finos. Porém, podemos considerar uma soma de N áreas de retângulos com base b/N e observar se o conjunto desses números, para vários N, tem um ponto de acumulação.

Notações

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$, lê-se "o limite de f quando x tende a a é L".
- $f(x) \xrightarrow{x \to a} L$, lê-se "$f$ tende a L quando x tende a a".
- "forma $0/0$" é *descrição,* não uma conta; a palavra "forma" é importante!

Comvém memorizar os seguintes:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos notáveis

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} = 0.$
- $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$
- $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\exp(t)-1}{t} = 1.$

Alguns desses resultados devem ser demonstrados através da definição de limite e, então, podem ser usados para deduzir os outros pelas regras de cálculo que estudaremos.

Atenção

- a no domínio: $f(a)$ existe, L pode ser igual *ou diferente ou nem existir.*
- a fora do domínio: $f(a)$ não existe, L pode existir ou não.

Limites laterais

É notação específica:

- $x \to a^+$ é $x \to a$ assumindo $x > a$ (escreva claramente);
- $x \to a^-$ é $x \to a$ assumindo $x < a$ (escreva claramente).

(Gráficos de saltos na lousa.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Para f definida em ambos os lados, temos $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow$

- $\exists \lim_{x\to a^-} f(x)$ e
- $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ e
- eles são iguais; esse é o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$.

Limites com infinitos

Úteis nos passos intermediários de limites bem reais.

Úteis no estudo assintótico de funções e casos particulares de inexistência do limite.

a ou L ou ambos podem ser infinitos.

Por exemplo, se ambos $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ são o mesmo ∞ (ou $-\infty$), então também $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$, respectivamente).

Note que $\mathbb{N}$ é um conjunto ilimitado superiormente e seu único ponto de acumulação, na reta estendida, é ∞. Assim, para uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, chamada *sequência,* somente faz sentido estudar $\lim_{n\to\infty} s_n$.

5.3 Cálculo de limites

Aprenderemos a calcular limites construindo diversos exemplos e reconhecendo as manipulações simbólicas utilizadas. Nas próximas seções, trataremos em separado as Regras de l'Hospital e as técnicas envolvendo o Teorema do Confronto, para somente então definir rigorosamente o conceito de limite.

Exemplos

- $\lim_{x\to\pi}(x^2 + \cos x) = \lim_{x\to\pi} x^2 + \lim_{x\to\pi} \cos x = \pi^2 + \cos\pi = \pi^2 - 1.$
- $\lim_{t\to-2}(t^3 5^t) = \big(\lim_{t\to-2} t^3\big)\big(\lim_{t\to-2} 5^t\big) = (-2)^3 5^{-2} = -\frac{8}{25}.$
- $\lim_{x\to1}\big(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1-x}\big) \neq \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1} + \lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}$ porque esses limites não existem; temos

$$\lim_{x\to1}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x}\Big) = \lim_{x\to1}\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x-1}\Big) = \lim_{x\to1} 0 = 0.$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\lim\limits_{x\to-\sqrt{\pi}} \cos(x^2) = \cos\Big(\lim\limits_{x\to-\sqrt{\pi}} x^2\Big) = \cos\pi = -1.$
- $\lim\limits_{y\to 4} \exp(20-5y) = \exp\Big(\lim\limits_{y\to 4}(20-5y)\Big) = e^{20-5\cdot 4} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -1 = -1.$
- Não existe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

- $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{t^2+6t}{t^2+3t}\right) \neq \dfrac{\lim\limits_{t\to 0}(t^2+6t)}{\lim\limits_{t\to 0}(t^2+3t)}$ porque o denominador é 0; temos

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2+6t}{t^2+3t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cancel{t}(t+6)}{\cancel{t}(t+3)}\right) = \frac{\lim\limits_{t\to 0}(t+6)}{\lim\limits_{t\to 0}(t+3)} = \tfrac{6}{3} = 2.$$

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{3x-2-x^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(1-x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(1-x)} = 1.$
- $\lim\limits_{a\to -1}\left(\dfrac{a^3+1}{a+1}\right) = \lim\limits_{a\to -1}(a^2-a+1) = 3.$

Na prática, portanto, trata-se de eliminar qualquer fator que impeça a conta: se $x \to 2$, procuramos cancelar qualquer $x-2$ no denominador para não "dividir por zero". Enquanto calculamos o limite, podemos de fato assumir $x-2 \neq 0$ porque, *conforme o conceito de limite, ao tomarmos* $x \to 2$*, impomos* $x \neq 2$.

(Lembre-se, no último exemplo, de que podemos reciclar o significado das letras...)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

O que aprendemos

- "lim distribui-se nas operações" *só se funcionar.*
- Somente substitua o valor a na conta se não der problema.
- Reescreva a expressão para simplificar *antes* da substituição.
- A substituição deve ser feira só no final, toda de uma vez.

Com a primeira frase, entre aspas, queremos dizer que "o limite da soma é a soma dos limites" ou "o limite do quociente é o quociente dos limites", todos sempre calculados no mesmo ponto a. Isso vale desde que os limites separados existam e a soma seja de um número finito de termos, ou o limite do denominador seja não-nulo, etc.

É sempre tentador, no cálculo de limites, fazer a substituição $x = a$. Lembre, porém, que o conceito de limite foi desenvolvido justamente para evitar esses problemas e o cálculo geralmente assume $x \neq a$. *Assim, se for feita substituição, deverá ser na última passagem e em todas as ocorrências da variável livre!*

Exercício

Calcule:

- $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4t+4}{t^2-2t}$. [a]
- $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}$. [b]
- $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. [c]
- $\lim_{\theta\to \pi} \operatorname{sen}\big(2\pi - \cos^{-1}(\operatorname{sen}\theta)\big)$. [d]

(Em um item, note que o limite é tomado quanto a h; carregue x em seus cálculos como uma constante desconhecida.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+1}-\sqrt{1-t}}{t}$.[e]
- $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-1+|1-x|}{x-1}$ e $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-1+|1-x|}{x-1}$.[f]
- $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{(t^2)}}{t}$ e $\lim_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt{(t^2)}}{t}$.[g]
- $\lim_{x\to(-2)^+} \sqrt{x+2}$ — fala-se em $\lim_{x\to(-2)^-} \sqrt{x+2}$?[h]

Observe que, em todos esses cálculos, não se usou a definição formal com ε e δ. Sempre que possível, evite tentar o uso direto da definição, aplicando apenas as regras operacionais e os limites já conhecidos de funções. Por outro lado, embora se possa determinar o valor de um limite por intuição, nos termos de "quando x está pertinho de a vemos que $f(x)$ está pertinho desse L", isso pode dar muito errado. *Para calcular um limite rigorosamente, é preciso fazer conta como nos exemplos.*

Mais exemplos

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^2+3x+4}{7x-3x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{9+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{7}{x}-3} = \dfrac{\lim_{x\to\infty}(9+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(\frac{7}{x}-3)} = \frac{9}{-3}$.
- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-6x+4}{12x^3-3x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{12-\frac{3}{x}} = \dfrac{\lim_{x\to\infty}(\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3})}{\lim_{x\to\infty}(12-\frac{3}{x})} = \frac{0}{12}$.
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) \neq \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+\ldots+\not{n})$; temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Novamente, é intuitivo estimar limites assim: "$12x^3-3x^2$ (cubo) cresce mais rápido que $5x^2-6x+4$ (quadrado) e o quociente acima vai a zero". Contudo, isso nem sempre funciona. *Para calcular rigorosamente, faça como nos exemplos.*

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Para calcular limites nos pontos infinitos, baseie-se nos gráficos das funções usuais (exponenciais, logaritmos, tangente,...) e utilize regras formuladas com as abreviações: $(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$, $L\pm\infty=\pm\infty$, $(\pm\infty)\times(\pm\infty)=\infty$, $(\pm\infty)\times(\mp\infty)=-\infty$ (as mesmas regras de sinais aplicam-se caso um multiplicando é real não-nulo), $L/\infty=0$ e $\infty/L^{>0}=\infty$ (idem). Não existem regras fixas para os casos indeterminados $\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$, que têm respostas variadas.

Tome cuidado com o que você escreve. Por exemplo, digamos que, para $x\to 5$, tenhamos $\varphi(x)\to 7$; então $2^{\varphi(x)}\to 2^7$. Considerando $\varphi(x)$ como uma subexpressão que ocorre no limite, não há, portanto, nenhum problema em escrever

$$\lim_{x\to 5} 2^{\varphi(x)} = 2^{\lim_{x\to 5}\varphi(x)} = 2^7.$$

Suponha, porém, que $\varphi(x)\to\infty$: **não** podemos escrever $\lim_{x\to 5} 2^{\varphi(x)} = 2^\infty = \infty$, mas devemos apresentar o cálculo de $\varphi(x)\to\infty$ separadamente para subsidiar nosso resultado do limite original. Do mesmo modo, se $\varphi(x)\to-\infty$, **não** escreva $\lim_{x\to 5} 2^{\varphi(x)} = 2^{-\infty} = 0$. Como você escreveria esses dois casos?

- $\lim\limits_{t\to\infty}(3t-7t^2+1) = \lim\limits_{t\to\infty} \underbrace{t^2}_{\to\infty}\underbrace{(\frac{3}{t}-7+\frac{1}{t^2})}_{\to -7} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$ porque $(1/x)\to\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $(1/x)\to-\infty$.

- $\lim\limits_{t\to 2^\pm} \dfrac{t}{2-t} = \lim\limits_{t\to 2^\pm} \dfrac{1}{2/t-1} = \mp\infty$ porque $(2/t-1)\to 0^\mp$, isto é, $2<t\to 2 \Rightarrow 0>(2/t-1)\to 0$.
- $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\sqrt{y+5}-\sqrt{y}\right) \neq \infty-\infty$, temos

$$\lim_{y\to\infty}\left(\sqrt{y+5}-\sqrt{y}\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{5}{\sqrt{y+5}+\sqrt{y}} = 0$$

porque $\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\to\infty+\infty=\infty$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

O que aprendemos

- Mantenha conta principal separada dos argumentos intermediários "intuitivos".
- Funções de substituição sem problema são as *contínuas.*
- Substituição prematura em subfórmula contínua pode desandar restante!
- Praticar exercícios é fundamental!

O porquê do nome "forma indefinida"

Escolha seu real $k \neq 0$:

- $\lim_{x\to\infty}(x + (k - x)) = k$, da forma $\infty - \infty$.
- $\lim_{x\to\infty}(kx^2)(x^{-3}) = 0$, da forma $\infty \times 0$ ou ∞/∞.
- $\lim_{x\to\infty}(kx^2)(x^{-2}) = k$, idem.
- $\lim_{x\to\infty}(kx^2)(x^{-1}) = \infty$ para $k > 0$, idem.

O valor do último limite é $-\infty$ se $k < 0$; por quê?

Lidaremos com formas indefinidas 0^0, 1^∞, ∞^0 via l'Hospital.**Não** são estes casos:

- $\lim_{t\to 3}(t + 2)^t = 5^3 = 125$.
- $\lim_{t\to 3}(t - 3)^t = 0^3 = 0$.
- $\lim_{t\to 2}(5t)^{2-t} = 10^0 = 1$.

Nesses casos, portanto, não se deve usar a transformação $f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x)\ln f(x)\big)$, que aprenderemos juntamente com a Regra de L'Hospital.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercícios

Calcule:

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.[a]
- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(x-6)^2(1-8x)^3}{x^5+2x+1}$.[b]
- $\lim_{y\to\infty} \dfrac{2}{y^2+y|y|+1}$ e $\lim_{y\to-\infty} \dfrac{2}{y^2+y|y|+1}$[c]
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$.[d]

- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.[a]
- $\lim_{a\to\infty} \dfrac{a^2-5a+1}{3a+7}$.[b]
- $\lim_{t\to5^+} \dfrac{5t-t^2-10}{t^2-25}$.[c]
- $\lim_{t\to5^-} \dfrac{5t-t^2-10}{t^2-25}$.[d]

- $\lim_{t\to0^\pm} t^{t-3}$.[e]
- $\lim_{x\to0^+} (x+\frac{1}{2})^{1/x}$.[f]
- $\lim_{x\to0^-} (x+\frac{1}{2})^{1/x}$.[g]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos com limites notáveis

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(12x)}{7x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12}{7}\Big(\dfrac{\operatorname{sen}(12x)}{(12x)}\Big) = \frac{12}{7}$. (Temos $12x \to 0$.)
- $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(n\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\pi\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = \pi$. (Temos $\pi/n \to 0$.)
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{0}{2} = 0$.

Em cada exemplo, temos uma expressão (função) que tende a um ponto de interesse quando a variável tende ao ponto original do limite. Essa expressão, portanto, pode ser pensada como um "bloco", uma "caixa preta" ou uma nova variável em termos da qual o limite está escrito. Pense a respeito em conexão com a composição de funções.

Nesse slide, com $y \to \infty$, se $r > 0$ temos $(y/r) \to \infty$ também, mas precisamos considerar separadamente o caso $r = 0$ (já que não podemos tomar y/r) e o caso $r < 0$, para o qual $(y/r) \to -\infty$. Assim, o resultado tem a mesma forma para os três casos, mas o modo de obtê-la é diferente.

Nos próximos slides, veremos a título de exemplos como alguns limites notáveis podem ser obtidos através de outros. Alguns deles, porém, permanecem fundamentais: quais?

- $\lim\limits_{y\to\infty}\Big(1+\dfrac{r}{y}\Big)^y = \lim\limits_{y\to\infty}\Big[\Big(1+\dfrac{1}{y/r}\Big)^{y/r}\Big]^r = e^r$ (para $r > 0$; se $r = 0$ então $\lim\limits_{y\to\infty}(1+0)^y = 1 = e^0$; se $r < 0$ então $(y/r) \to -\infty$).
- $\lim\limits_{y\to-\infty}\big(1+\frac{1}{y}\big)^y = e$: com $x = -y$ temos $x - 1 \to \infty \Leftrightarrow y \to -\infty$ e

$$\big(1-\tfrac{1}{x}\big)^{-x} = \big(\tfrac{x}{x-1}\big)^x = \big(1+\tfrac{1}{x-1}\big)^x = \big(1+\tfrac{1}{x-1}\big)^{x-1}\big(1+\tfrac{1}{x-1}\big).$$

- $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$ com $t \to 0^{\pm}$ separadamente e $x = (1/t) \to \pm\infty$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\lim_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$: com $u=e^t-1$ temos $t=\ln(1+u)$ e $t\to 0\Leftrightarrow u\to 0$, donde

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}=$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}}=\frac{1}{\ln\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}}=\frac{1}{\ln e}.$$

- $\lim_{t\to 0}\dfrac{1-e^{-t}}{\operatorname{sen} t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{e^t\operatorname{sen} t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}\cdot\dfrac{t}{\operatorname{sen} t}\cdot\dfrac{1}{e^t}=1.$

O que aprendemos

Usando limites notáveis ou passos intermediários, a substituição de uma variável por outra deve ser integralmente feita.

Exercício

Calcule:

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.[a]
- $\lim_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(320y)}{\operatorname{sen}(41y)}$.[b]
- $\lim_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}$ para $a>0$.[c]
- $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.[d]

Note, em um item, a relevância do número e: outras bases a requerem um fator $\ln a$. Isso ocorrerá também em derivação e integração.

Alertas

Cuidado com "estimativas por calculadora", ex.:

$$\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{\cos x}{1\,\mathrm{mol}}\right),\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{1\,\mathrm{mol}}}{(1+10^{-1\,\mathrm{mol}})^x}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Funções "por partes": calcule limites laterais. Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{se } x < 7, \\ 35 + bx & \text{se } x > 7. \end{cases}$$

Temos $\lim_{x\to 7^-} f(x) = 49a$ e $\lim_{x\to 7^+} f(x) = 35 + 7b$; existe $\lim_{x\to 7} f(x)$ se $a = 1$, $b = 2$ entre outros.

5.4 Confronto, sanduíche ou *squeeze*

Suponha $a \in [-\infty, \infty]$. Assuma α, f, β definidas numa vizinhança de a satisfazendo $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$.

- Se existe $L = \lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} \beta(x)$ então existe $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
- Se $\lim_{x\to a} \alpha(x) = \infty$ então $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- Se $\lim_{x\to a} \beta(x) = -\infty$ então $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

O Teorema do Confronto permite-nos, quando podemos encontrar α e β mais simples, determinar o limite de uma f complicada, como a demonstração de $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$. Ele também é usado para provar a continuidade de várias das funções que listaremos futuramente.

Corolário
$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g *limitada* numa viz. de $a \Rightarrow \lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = 0$.
Porque, se $|g(x)| \leqslant K$, então $-K|f(x)| \leqslant f(x)g(x) \leqslant K|f(x)|$.

(Não podemos escrever simplesmente $-Kf \leqslant fg \leqslant Kf$ porque f pode ser negativa em alguns pontos.)

Um segundo corolário, análogo a esse, diz que quando $f \to \pm\infty$ e $g \geqslant \varepsilon > 0$ temos $(f \times g) \to \pm\infty$, ou quando $f \to \pm\infty$ e $g \leqslant \theta < 0$ temos $(f \times g) \to \mp\infty$, onde ε, θ são constantes. Você consegue mostrar essas duas implicações invocando o Teorema do Confronto?

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos

- $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ porque $|\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leqslant 1$ e $x \to 0$. (Gráfico na lousa.)
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ porque

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n}\right)}_{n-1 \text{ termos} \leqslant 1} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0.$$

Exercício

Calcule:

- $\lim_{x\to 1}(x-1)\chi_{\mathbb{Q}}(e^{\pi x} - \sqrt{2})$, onde $\chi_{\mathbb{Q}}(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } y \in \mathbb{Q}; \\ 0 \text{ se } y \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$ [a]
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{6n^2 - \operatorname{sen}(n!)}{3n^2 + 4}$. [b]
- $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ — faça o gráfico da função. [c]

5.5 Regras de l'Hospital

Essas regras (no plural) correspondem a uma única equação em várias situações (relativas a pontos reais ou infinitos).

Pronuncia-se "lô-pi-tál". O marquês de l'Hospital não as inventou, mas divulgou-as em um dos primeiros livros-texto de Cálculo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Requerem derivação (próx. cap.). Tabela simples:

$f(x)$	$f'(x)$
$c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x) \pm c_3$	$c_1 f_1'(x) \pm c_2 f_2'(x) \pm 0$
x^r	$r x^{r-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\ln x$	$1/x$

Estudaremos derivação no próximo capítulo. Se você ainda não tomou contato com esse conceito, apenas acompanhe os exemplos substituindo as "funções-linha" de acordo com a tabela acima e, *depois, certifique-se de retornar a este tópico e estudá-lo!*

Funcionam para limites comuns, laterais e nos pontos infinitos.
Funcionam para limites reais e infinitos; **não** para oscilantes.
Verifique todas as condições necessárias com atenção.
Quando usar, escreva: qual forma indeterminada; L'H sobre =.

A identidade

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{ talvez } \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Nestas condições

(1) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ das formas $\frac{0}{0}$ ou $\pm\frac{\infty}{\infty}$: ambas $f(x), g(x) \to 0$ ou ∞.

(2) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty]$, isto é, existe ou explode (não oscila).

(3) f, g deriváveis em uma vizinhança de a, exceto talvez em a, e $g, g' \neq 0$.

Se (1), (2) ou (3) fura, então não funciona.)

(Uma *vizinhança de a* contém um intervalo aberto que, por sua vez, contém a. Assim, as funções são deriváveis ao redor de a.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Formalmente, as condições (1) e (2) só podem ser formuladas se (3) já for satisfeita; portanto, os livros-texto geralmente listam esta condição primeiro, mas o modo mais simples de verificá-la é conduzindo o próprio cálculo.

Procure, em seu livro-texto de Cálculo, discussão e exemplos para as seguintes situações:

(a) O limite desejado não é das formas indeterminadas indicadas e, então, o resultado dado por l'Hospital é incorreto.

(b) O limite desejado é das formas indicadas, mas o quociente com derivadas é oscilante e seu limite nem existe nem é ∞ ou $-\infty$; desta vez, l'Hospital sequer produz um resultado.

(c) L'Hospital pode ser aplicado, mas a conta fica muito complicada.

Nessas três situações, o limite da expressão original deve ser determinado de outros modos, podendo existir (ou ser infinito) ou não.

Note que se tomam as derivadas do numerador e do denominador, diretamente. Aqui, estamos tomando os limites de razões; não confunda, portanto, com a derivada do quociente (que é outra fórmula).

A demonstração das duas regras (correspondendo às duas formas) obviamente requer conhecimentos de derivação; especificamente, o Teorema de Cauchy. Deixaremos a seu encargo estudá-las no livro quando tiver os conhecimentos necessários, mas daremos uma idéia intuitiva quando apresentarmos a melhor aproximação linear de uma função.

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2}{1} = 12$, da forma $0/0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2-6x+1}{7x^2-2} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5\cdot 2x-6}{7\cdot 2x} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{10}{14} = \frac{5}{7}$, ambas da forma ∞/∞.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^2-6x+1}{4x^3+7x^2-2} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5\cdot 2x-6}{4\cdot 3x^2+7\cdot 2x} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{10}{12\cdot 2x+14} = 0$, ambas da forma ∞/∞.
- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t}{1} = 1$, da forma $0/0$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Outras formas indeterminadas podem ser estudadas usando-se l'Hospital, como veremos nos próximos slides.

Para as formas $0 \times \infty$ e $\infty - \infty$, simplifique algebricamente a uma única fração. Pode haver dois ou mais jeitos de fazer isso e vale a pena tentar vários a fim de obter uma conta mais simples. Algumas manipulações dessas formas são bastante complexas ou envolvem derivadas mais complicadas, por exemplo $x \operatorname{tg} x^{-1}$ com $x \to \infty$, e convém praticá-las em vários exercícios.

- $\lim\limits_{t\to 0^+} t \ln t = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\ln t}{t^{-1}} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t^{-1}}{-t^{-2}} = \lim\limits_{t\to 0^+} (-t) = 0$, da forma ∞/∞.
- $\lim\limits_{t\to 0^+} t^t = \lim\limits_{t\to 0^+} e^{t \ln t} = \exp\Big(\lim\limits_{t\to 0^+} t \ln t\Big) = e^0 = 1$, da forma 0^0, usando anterior.
- $f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x) \ln f(x)\big)$ para as formas 1^∞, 0^0 e ∞^0.

(Note que a transformação requer $f^g > 0$.)

- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{7/x} = \lim\limits_{x\to 0} \exp(7x^{-1} \ln(1+x)) = e^7$ porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{7 \ln(1+x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{7/(1+x)}{1} = 7 \text{ da forma } 0/0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x^2}{x^2 \operatorname{sen} x} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 2x}{2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x} = \infty$.

E com $x \to 0^-$? A última expressão precisa ser melhor estudada, por quê? Já o limite pode ser obtido diretamente no início!

Exercício

Quais limites notáveis podem ser calculados usando as Regras de l'Hospital?Confira os resultados com os valores tabelados.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Calcule:

- $\lim_{x\to -1} \dfrac{1+x^{325}}{1-x^{234}}$. [a]
- $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta^2+\operatorname{sen}\theta}{\ln(\theta+1)}$. [b]
- $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{7t^2-8\cdot 3^t+20}{9\cdot 6^{2t}-5t^2+21}$. [c]
- $\lim_{y\to\infty} (y^{-1}\ln y)$. [d]
- $\lim_{y\to\infty} y^{1/y}$. [e]

Observamos, para concluir o assunto, que parece possível iniciar o estudo de Cálculo diretamente com as regras formais de derivação e então apresentar a computação de limites usando l'Hospital. Embora essa abordagem tenha o mérito da rapidez, tenha em mente que as regras de l'Hospital não resolvem todos os limites!

5.6 Definições de limites

Agora, já aprendemos a calcular diversos limites, mas sem garantias que possamos calcular todos. Não encontramos um modo específico (algoritmo) para aplicar as diversas técnicas e, também, há ocasiões em que elas não dizem se o limite não existe. Resta, assim, explorar a teoria dos limites um pouco mais, com o objetivo de clarificar nossa percepção do conceito. O Teorema do Confronto foi um primeiro passo nessa direção.

A definição a seguir aplica-se a uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$ com domínio $D \subseteq \mathbb{R}$, um limite numérico $L \in \mathbb{R}$ e em um número a que seja ponto de acumulação de D, isto é, f está definida em pontos arbitrariamente próximos de a, mas talvez não no próprio a.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\lim_{x\to a} f(x) = L$

$\Leftrightarrow$ Para qualquer tolerância permitida $\varepsilon > 0$ (*por menor que seja*), existe uma folga $\delta > 0$ tal que se a matéria prima x estiver δ-perto de a então o produto final $f(x)$ estará ε-perto de L.

$\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Não se considera o caso perfeito $x = a$, ou seja, L independe de $f(a)$ se esta existir.

Essa definição é realmente complexa, porque resolve um problema difícil que atravessou milênios. Trata-se de lidar com grandezas infinitamente grandes ou pequenas, ou ainda um número infinito delas, algo que melindrava os gregos e os escolásticos, que os renascentistas abusaram e que somente no séc. XIX conseguimos descrever, usando exclusivamente os bem conhecidos números reais finitos em uma quantidade finita.

(No séc. XX, começou-se a formalizar os cálculos originais dos renascentistas com grandezas além dos números reais, ou seja, trabalhando-se em corpos não-arquimedianos que estendem o corpo $\mathbb{R}$. Esse assunto é a *Análise Não-Standard* e relacionado com a área de pesquisa do autor.)

Assim, não se espera que você entenda-a imediatamente. Volte a ela, após praticar as contas, várias vezes ao longo do curso. Aqui está uma primeira explicação:

O jogo do ε–δ para f, a, L fixados:

Desafiante escolhe $\varepsilon > 0$ e Respondente tenta defender com $\delta > 0$ tal que

$$D \cap \big(]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[\big) \xrightarrow{f}]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\,.$$

Desafiante refina ε e Respondente tenta defender com δ mais refinado também.

Se Respondente sempre consegue, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Se Desafiante propõe *ε para o qual Respondente não tem δ,* então $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ (e o limite pode ser outro nº ou não existir).

Assume-se que o Desafiante e o Respondente nuncam erram em suas escolhas para tentar ganhar o jogo. É claro que outros δ podem não ajudar, mas se houver algum que faça o trabalho, então o Respondente saberá encontrar um destes. Qual é o raciocínio análogo quanto ao Desafiante?

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$\lim_{x\to 3}(7-5x) = -8$. (Gráfico na lousa.)

Desafiante escolhe qualquer $\varepsilon > 0$. Respondente toma $\delta = \varepsilon/5 > 0$. Se $3-\delta < x < 3+\delta$, mas $x \neq 3$, então $15-\varepsilon < 5x < 15+\varepsilon$, donde $-8-\varepsilon < 7-5x < -8+\varepsilon$.

Respondente consegue rebater qualquer proposta do Desafiante.

De onde tiramos esse δ? A figura indica a resposta: verificamos qual é o intervalo perfurado centrado em 3 totalmente contido na pré-imagem de $]-8-\varepsilon, -8+\varepsilon[$.

Exercício

Mostre graficamente (isto é, usando tubinhos para o jogo do ε–δ) que

$$\lim_{x\to -2} \tfrac{1}{2}|x-8| = 5.$$

Use o gráfico para determinar δ como expressão algébrica de ε. Verifique também algebricamente, então, que $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ implica $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Exemplo

$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{para } x < \pi; \\ x^2 & \text{para } x > \pi; \end{cases}$ e $a = \pi$. (Gráfico na lousa.)

Fixe algum L, digamos $L = 0{,}6$.

Escolhe $\varepsilon = 2$, responde $\delta = 1$; se $x \in]\pi-\delta, \pi[$ então $f(x) = 0$ e se $x \in]\pi, \pi+\delta[$ então $f(x) = 1$, ambos $0, 1 \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

Escolhe $\varepsilon = 0{,}2$, não há resposta $\delta > 0$: distância entre 0 e 1 maior que 0,4.

Assim, $\lim_{x\to\pi} f(x) \neq 0{,}6$ ou 0 ou 1 ou L qualquer; note $f(a) = 1$.

Nesse caso, diz-se que f *não tem limite em* a. Alguns autores escrevem $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$.

Note que, para dizer que o limite não existe, é preciso verificar que nenhum número serve como limite, ou seja, que a propriedade usada na definição não é válida para nenhum L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo
$f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = -4$. (Gráfico na lousa.)
Não há limite quando $x \to 0$.
Exercício
Por que nenhum L serve?

Exemplo
$f(x) = 1/|x|$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 5$. (Gráfico na lousa.)
Não há limite quando $x \to 0$.
Exercício
Por que nenhum L serve?

Concepção do limite por sequências: Para $a, L \in [-\infty, \infty]$, temos $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$\Leftrightarrow$ Quaisquer que sejam os passos pelos quais obtenhamos aproximações cada vez melhores de a, as f-imagens nos fornecem aproximações cada vez melhores de L.

$\Leftrightarrow \big(\forall s\colon \mathbb{N} \to D \setminus \{a\}\big) \lim_{n\to\infty} s_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(s_n) = L.$

É necessária a hipótese usual de a ser ponto de acumulação do domínio de f, de modo que exista pelo menos uma tal sequência s. Uma demonstração dessa equivalência encontra-se na "Introdução aos Limites", página 92. □

Nos infinitos
Para a ou L em $\pm\infty$, temos adaptações:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\, x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow$

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\, x > K \Rightarrow f(x) < M$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Deixamos a seu cargo compreender o porquê dessas formulações e reescrevê-las explicitamente com as demais combinações de $\pm\infty$.[a]

O primeiro limite, por exemplo, lê-se: "Para qualquer tolerância permitida $\varepsilon > 0$, existe uma 'cota mínima' ou 'nota de corte' $K \in \mathbb{R}$ tal que se a matéria prima x estiver em D e superar K (ou seja, estiver suficientemente próximo de ∞) então o produto final $f(x)$ estará ε-perto de L."

Lembramos que se diz que o limite existe somente quando L é um número real.

5.7 Continuidade

No próximo slide, um "ponto isolado" de um conjunto pertence a esse conjunto, mas não tem outros elementos dele arbitrariamente próximos de si, ou seja, não é ponto de acumulação do conjunto.

Para $a \in D$: *f é contínua em a* nos casos:

- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *ou*
- a é isolado em D.

isto é,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Diz-se que f é *contínua* se o for em todo ponto de D. (Casos contrários: *descontínua*.)

Note que, agora, podemos remover a condição $0 < |x - a|$, ou seja, considerar $x = a$, porque podemos calcular f em a (já que $a \in D$) e também porque nesse caso $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Funções com domínios sem pontos de acumulação contidos são sempre contínuas, pelo modo como se escreveu a definição! Assim, toda sequência $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é contínua. Para que uma função seja contínua é preciso apenas que, em cada ponto de acumulação a de D que pertença ao próprio D, tenhamos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Intuitivamente: gráfico não "salta"; recorde interpretação do limite com tubos.

$\operatorname{tg}(x)$ é contínua ("saltos" fora do domínio).

São funções contínuas (em seus domínios!): polinomiais, racionais e constantes, módulo, potências e raízes, exponenciais e logarítmicas, trigonométricas e suas inversas.

No exercício a seguir, exploramos o que é necessário para algumas funções serem contínuas. Tecnicamente, uma descontinuidade de f em a é classificada como *removível* se outro valor para $f(a)$ torna f contínua em a e *essencial* caso contrário, quando limites laterais em a são diferentes, inexistentes ou infinitos. Uma discussão análoga pode ser feita quando $a \notin D$, tratando-se de verificar a possibilidade de *estender continuamente* uma função a um domínio maior.

Exercícios

- Qual deve ser $f(5)$ para que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com

$$f(x^{\neq 5}) = 3 + (x-5)^{-1}\operatorname{sen}(x-5)$$

  seja contínua?[a]

- Existe valor $g(2)$ que preserve a continuidade de $g(x) = \begin{cases} 3 \text{ se } x < 2; \\ 5 \text{ se } x > 2; \end{cases}$?[b]

- Abaixo, quais devem ser a, b, c para h ser contínua?[c]

$$h(x) = \begin{cases} 2a - 5x & \text{se } x < 3, \\ 9 & \text{se } x = 3, \\ 25 - b(x+1)^2 & \text{se } 3 < x < 7, \\ c\operatorname{sen}(\pi x + \frac{\pi}{2}) & \text{se } x \geqslant 7. \end{cases}$$

Exercícios extraordinários: Mostre que

$$\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

não é contínua em nenhum ponto.

Mostre que

$$f\colon\ ]0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x = m/n \text{ reduzido,} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

é contínua precisamente nos pontos irracionais de $]0,1]$.

Esses problemas são difíceis apenas em termos do que é necessário escrever; mais importante é entender o que eles estão dizendo. Você pode resolvê-los com a propriedade usando ε e δ. Para o segundo, a chave é observar que há tanto pontos racionais como irracionais arbitrariamente próximos de qualquer número real. Quando este real é irracional, os racionais próximos a ele têm denominadores crescentes. □

As funções contínuas, porque são bem comportadas, têm grande destaque e utilidade no Cálculo. Veremos, agora, vários aspectos e diferentes sentidos desse "bom comportamento" que, além de facilitar-nos os cálculos de limites, confirmam, ressaltam ou corrigem nossa intuição a respeito delas. Muitas dessas propriedades têm formulações (chamadas "topológicas") na terminologia que conhecemos em "A Estrutura dos Números Reais".

Busque mais teoremas, contra-exemplos e exercícios em seu livro de Cálculo, mas dê especial atenção ao TVI e à remoção de descontinuidades.

Propriedades

Consequências das regras de limites:

- f, g contínuas em $a \Rightarrow f \pm g$ e $f \times g$ contínuas em a.
- f, g contínuas em a e $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$ contínua em a.
- f, g contínuas em $a, f(a)$ resp. $\Rightarrow g \circ f$ contínua em a.

Assim, mostra-se continuidade de funções complicadas, como

$$\frac{x^{-2} + \operatorname{sen} 6x}{e^x \ln(x-3)}.$$

Ferramenta teórica: A seguinte propriedade é útil em algumas demonstrações:

> Suponha que $f\colon D \to \mathbb{R}$ é contínua em a e que $f(a) > u$. Então $f|_{D\cap V} > \widehat{u} > u$ para algum valor $\widehat{u}$ e alguma vizinhança V de a.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Um enunciado análogo pode ser feito quando $f(a) < u$.) A demonstração desse fato é simples e requer apenas a formulação de continuidade com ε–δ: tome ε particular menor que a diferença absoluta entre o limite e u e então determine $\widehat{u}$.

Sem a hipótese de continuidade, podemos aplicar o mesmo raciocínio a $\lim_{x\to a} f(x)$ em vez de $f(a)$, de onde se conclui apenas que $f|_{D\cap V\setminus\{a\}} > \widehat{u}$.

Essa propriedade é especialmente útil quando $u = 0$. Por exemplo, se $f(a) < 0$ então $f(x) < \theta < 0$ para algum θ e todo x em alguma vizinhança de a, ou seja, *f conserva seu sinal ao redor de a.* Além disso, impor θ é importante porque nos oferece um limitante para f ainda abaixo do próprio zero, de modo que $1/f$ *também é limitada.* □

Teorema do Valor Intermediário (TVI, Bolzano)

Dados $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua (em tudo) e $f(a) < u < f(b)$ (ou $f(a) > u > f(b)$), existe $x^* \in]a,b[$ com $f(x^*) = u$.

(Gráfico na lousa.) Isso garante que funções contínuas "não pulam".

Exemplo

$f(x) = x - \cos x$ tem $f(0) = -1$ e $f(\pi) = \pi + 1$, então existe $0 < \theta < \pi$ com $f(\theta) = 0$.

Não diz quais ou quantas raízes!

Veja que

- *não demos um valor* para essa solução θ da equação $x - \cos x = 0$ (que não é um valor trivial),
- *nem determinamos quantas soluções* a equação tem no intervalo $[0, \pi]$.

Tudo o que o TVI fornece é a existência de ao menos uma solução.

Método da bissecção: Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, indicando a existência de uma raiz de f em $[a,b]$, calcule também o sinal de $f(\frac{a+b}{2})$. Conforme esse sinal, a raiz deverá estar em $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$. Repetindo o processo quantas vezes for necessário, podemos precisar a localização da raiz em um intervalo com comprimento menor que algum erro previamente fixado.

Simon Stevin utilizou uma idéia similar para produzir aproximações de raízes polinomiais com tantas casas decimais quanto desejado. Como isso pode ser feito?[a] □

O TVI assume muitos nomes: Teorema de Bolzano, Anulamento, etc. Em linguagem topológica, ele afirma que a imagem de um conjunto conexo por

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

uma função contínua também é conexa. O TVI é imensamente importante e você deverá encontrar diversas aplicações em seu livro de Cálculo. Por exemplo (Borsuk–Ulam), em qualquer círculo máximo sobre a Terra, existem dois pontos antípodas com a mesma temperatura!

A "Propriedade do Valor Intermediário" contida no enunciado do teorema foi, há algum tempo, sugerida como uma definição de continuidade motivada por vetar diretamente os "saltos". Porém, não foi a opção adotada; a definição com que trabalhamos é mais complexa, mas mais versátil matematicamente porque se aplica a outras situações, como funções vetoriais. Observe que a $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$ não é contínua, mas tem essa propriedade.

Exercício

Mostre que $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3$ tem ao menos três raízes distintas.[a]

Dica: busque três intervalos.

Teorema de Weierstrass (Valores Extremos)

Dados $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua (em tudo), existem $x_m, x_M \in [a,b]$ tais que $(\forall x \in [a,b])\ f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)$.

(Gráfico na lousa.) Nota: $x_m, x_M \not\equiv a, b$.

Exemplo

$\{\, x^{-2} + \operatorname{sen} x \mid 3 \leqslant x \leqslant 8 \,\}$ tem máximo e mínimo.

Para aplicar o teorema no exemplo, observamos que o conjunto dado é a imagem da função contínua $f\colon [3,8] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-2} + \operatorname{sen} x$.

Topologicamente, Weierstrass diz que a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua também é compacta. Como estudaremos posteriormente, determinar máximos e mínimos de funções e conjuntos é muito importante; sua existência (primeiro passo!) é garantida por esse teorema.

Note que, em algumas propriedades acima, estudamos funções cujos domínios são intervalos limitados e fechados. Isso se tornará cada vez mais comum, porque domínios mais complicados originam patologias. Por exemplo, tome $f\colon [0,1[\cup[2,3] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x < 1; \\ x-1 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$ Então f é contínua (em seu domínio) e estritamente crescente, logo, injetora. Sua inversa, porém, não é contínua!

Exercício extraordinário: Mostre que a imagem de $[a,b]$ por uma função contínua f também é um intervalo fechado e limitado. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Continuidade da inversa: Se $f\colon [a,b] \to C$ é bijetora contínua, então f^{-1} é contínua. (Caso particular: f estrit. crescente ou decrescente.)(Trabalhamos com $C \subseteq \mathbb{R}$ que deverá, de fato, ser um intervalo pelo TVI e limitado por Weierstrass. A demonstração utiliza a caracterização da continuidade por sequências e a compacidade de $[a,b]$.) □

5.8 Sequências e séries

Encerraremos este capítulo apresentando sequências e séries numéricas e funcionais. Devemos restringir-nos a uma introdução breve, com o intuito de perceber algumas propriedades e sutilezas importantes. Uma exposição completa requereria um curso específico e um livro-texto apropriado, mas alguns livros de Cálculo também trazem aulas resumidas. Embora o assunto seja simples de alguns pontos de vista, seu estudo rigoroso com demonstrações completas exige atenção ao encadeiamento lógico: cada informação é utilizada nos argumentos seguintes.

Já utilizamos sequências numéricas para formular concepções diferentes dos conceitos de limite e continuidade.

Sequências numéricas

São funções $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; escrevemos $s_n = s(n)$ e

$$s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_0, s_1, s_2, \ldots).$$

s converge a $L \in \mathbb{R}$ se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)\, |s_n - L| < \varepsilon.$$

(gráficos na lousa).

Usa-se o cálculo usual de limite, exceto l'Hospital cru.

Por exemplo, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, por ser um caso particular de $x \to \infty$ no limite notável correspondente.

As Regras de l'Hospital baseiam-se em derivação que, por sua vez, é feita em pontos reais; portanto, não se aplicam a sequências e não podemos derivar sequências. O que se pode fazer é aplicar l'Hospital com a extensão óbvia da expressão considerada à reta real contínua ($f(x)$ em vez de $f(n)$, resolver em $a \in \mathbb{R}$, arbitrário, e então fazer $a \to \infty$). Além disso, é claro, precisamos tomar cuidado com a operação de fatorial, cuja extensão a uma variável contínua é mais complicada.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Subsequência

Dada injeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,tomamos $s_{\varphi(n)}$.

Exemplo: $(s_3, s_7, s_{13}, s_{21}, \ldots)$

Bolzano–Weierstrass

Toda sequência *limitada* de números reais tem uma subsequência convergente.

(O Teorema de Bolzano–Weierstrass é devido à completude da reta real, ou seja, ao Axioma do Supremo.)

Cauchy

s converge se e somente se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant N)\, |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Note que a propriedade não envolve, nem diz quem é L!

Assim como sequências são dadas por uma "fileira infinita" de números reais rotulados pela ordem dos números naturais, podemos também considerar sequências de funções $f_0, f_1, f_2, \ldots$, o que explicaremos ainda nesta seção.

Séries numéricas

São sequências da forma

$$(a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots).$$

A notação $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pode significar:

- A própria sequência s das *somas parciais* $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$;
- O limite $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$.

Exemplo usual: somas de progressões geométricas.

Note a solução utilizada: em vez de somar um "número infinito" de termos, operação que não está previamente definida, realizamos apenas somas comuns e tomamos o limite.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Como no caso de sequências, para vários autores, os termos das séries podem ser indexados a partir de 1 em vez de 0. Basta apenas ter cuidado com rearranjos e reindexações em operações sobre termos. Além disso, muitas vezes a fórmula que descreve termos é mais convenientemente escrita sem o índice 0.

A partir das propriedades de limite, podemos fatorar multiplicadores "para dentro ou fora de uma série", mas com cuidado, porque se esse fator for zero, pode mascarar uma divergência. Também podemos somar séries "termo a termo" se ambas convergem: então a série das somas dos termos correspondentes converge à soma dos seus limites; outras situações são mais delicadas. Multiplicar séries requer atenção e método especiais.

Exemplo telescópico

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}) = \\ &= \lim_{k\to\infty}\big((\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+\ldots+(\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k+1})\big) = \\ &= \lim_{k\to\infty}\big(1-\frac{1}{k+1}\big) = 1.\end{aligned}$$

Essa é uma "série telescópica", porque em suas somas parciais cada termo cancela-se com o antecessor e o sucessor, sobrando apenas partes do primeiro e do último termos. O nome é reminiscente dos telescópicos portáteis antigos que se abriam e fechavam encaixando cada seção do tubo dentro de outra.

Exemplos

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p>1$ (usa-se integral).
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge (Leibniz).
- Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge então $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (exercício); não vale recíproca.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Há diversos critérios ou testes de convergência que, em alguns casos, determinam o comportamento da série. Você deve buscar conhecê-los separadamente, porque facilmente as séries com as quais trabalhar já complicarão suficientemente o cálculo bruto via limite.

Mais importante, agora, é notar que esses critérios têm como hipótese, em sua maioria, algum comportamento dos termos da série *a partir de um certo n_0,* ou seja, somente interessa a "cauda" da série. Isso ocorre porque a soma dos primeiros n_0 termos é claramente um número finito e não provê dificuldades à convergência, enquanto que poderia não satisfazer as hipóteses do critério. Pense a respeito no próximo exercício:

Exercício extraordinário: Suponha que $a_n, b_n \geqslant 0$ e $a_n \leqslant c \cdot b_n$ para algum $c > 0$, a partir de um certo n_0. Mostre:

- Se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.
- Se $\sum a_n$ diverge então $\sum b_n$ diverge.

Dica: use o Teorema do Confronto. □

O conceito de "convergência absoluta", no próximo slide, é a resposta para a questão: "Podemos mudar a ordem da soma de uma série?"

Convergência absoluta

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é *absolutamente convergente* se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Nesse caso, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e, para qualquer bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Se convergência não é absoluta e há infinitos termos de cada sinal, então (Riemann)

$$\big(\forall S \in [-\infty, \infty]\big)(\exists \varphi\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}) \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Caso haja somente um número finito de termos com um sinal, seja positivo ou negativo, sua soma não interfere na convergência (que será absoluta) ou divergência da série. Excluídos esses termos, se são necessários N dos demais termos para superar uma cota M, então após a reordenação por uma bijeção φ são necessários

$$\max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(N)\}$$

termos para superar M. Nesse caso, portanto, a série será sempre divergente, independentemente de reordenação.

Discussão extraordinária: Assim como se fala em convergência de números, pode-se falar em convergência de funções: cada função f_n desempenha melhor e melhor o papel da função f. Como antes a respeito de limites, também se deve dar significado preciso ao conceito $f_n \to f$. Nesse caso de funções, há muitos tipos de convergência, cada um melhor adaptado a um propósito. Em Estatística, por exemplo, a "convergência em medida" é muito aplicada.

A forma mais óbvia de convergência é chamada *simples:* dadas $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $f \colon D \to \mathbb{R}$, definimos que $f_n \xrightarrow{\text{s}} f$ se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in D$. A convergência simples, portanto, não requer relação alguma entre as convergências em diferentes pontos do domínio; dado $\varepsilon > 0$ na definição do limite de sequência, o valor mínimo N depende tanto de ε como de x.

Mas a função-limite f pode não herdar propriedades das funções f_n se a convergência é apenas simples. Por exemplo, as funções $f_n(x) = x^n$ são contínuas em $[0, 1]$, mas quem é seu limite?

A convergência *uniforme* sana esse problema: nela, N depende de ε apenas e funciona igualmente bem para qualquer $x \in D$. Assim, se $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$, não somente $f_n \to f$ ponto a ponto, mas também $\|f_n - f\| = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$; essa "norma da diferença" serve para definir distância entre funções.

Esses detalhes sobre formas de convergência serão importantes caso se queira, nos próximos capítulos, tomar a derivada ou a integral do limite de uma sequência de funções como sendo o limite das derivadas ou integrais dessas funções, ou analogamente quanto a séries de funções; somente sob condições fortes de convergência é que essas operações são válidas.

Uma série de funções é, portanto, uma somatória $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, cujas somas parciais formam uma sequência de funções. Existem ainda mais critérios e testes de convergência para essas séries. Dentre elas, as séries de potências como abaixo são um caso particular. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Séries de potências

Dados $a_n \in \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, queremos definir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

dita *série de potências de x centrada em x_0.*

As funções definidas usando-se séries de potências foram as favoritas no desenvolvimento inicial da Análise, como veremos ao estudar derivação. Utilizando-se os polinômios de Taylor, relacionam-se os valores a_n e $f^{(n)}(x_0)$, obtendo-se a unicidade de cada coeficiente da série.

Tem *raio de convergência* $R \in [0, \infty]$:

- se $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ então converge abs. e função definida assim é contínua;
- se $|x - x_0| > R$ então a série diverge;
- em cada $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$, comportamento pode ser diferente.

(Com ajustes na notação se $R = \infty$.)

Assim, *intervalo de convergência* pode ser aberto, fechado, semi-aberto ou todo $\mathbb{R}$.

(No primeiro item, de fato, a função definida assim é de classe C^∞, como definiremos futuramente, e as séries derivadas também têm raio de convergência R. A convergência da série pode não ser uniforme em todo o intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$, mas o é, sim, em qualquer subintervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ com $0 < r < R$. Nesse subintervalo, portanto, poderemos operar derivação e integração termo a termo.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

O raio é dado por

$$R = \sup\{\, r > 0 \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\ \sqrt[n]{|a_n|} < r^{-1} \,\}.$$

Situações práticas:

- Se $a_n \neq 0$ e existir $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, então $R = 1/L$.
- Se existir $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ então $R = 1/L$.

Exercício

Mostre que

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \quad \text{e} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

têm raios de convergência infinito.

Cuidado: alguns coeficientes são zero.

Dica: use $y = x^2$ e fatore um x em s.

Estas séries permitem formalizar, rigorosamente, o uso das funções trigonométricas em Cálculo, partindo-se apenas dos axiomas de corpo ordenado completo (veja "A Estrutura dos Números Reais"), sem apelo à geometria. De fato, mostra-se que elas satisfazem as propriedades usuais do seno e do cosseno.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 6

Derivação

Embora já tenhamos feito uma "Introdução à Derivação", este capítulo e o próximo fundamentam o cálculo de derivadas e suas aplicações, a partir de sua definição por limite.

É a definição de taxa de variação instantânea que tem significado e aplicabilidade, enquanto as regras de derivação, embora práticas, não guardam interpretação alguma.

6.1 Motivação e definição

Posição $s(t)$ função do tempo: velocidade média entre $t_1 < t_2$ é

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Como definir velocidade instantânea? (t_1, t_2 aproximando-se.)
Não podemos dividir por zero! Solução:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

A derivação, que é o cálculo desse limite, é feita em pontos interiores do domínio da função. Veja: um número a é *ponto interior* de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ se existe um pequeno $\delta > 0$ tal que $]a - \delta, a + \delta[\subseteq D$. Assim, temos $a \in D$ e também há todo um espaço em D em torno de a, tanto para a esquerda como para a direita, onde podemos calcular a função livremente.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Suponha $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ e a pto. interior de D. Se

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existir (nº real!), diz-se que f *é derivável em a com derivada $f'(a)$.*

(Se f não é derivável em a, então não se fala de $f'(a)$, mesmo no caso de "limite infinito".)

f *é derivável* se o for em todo ponto de D.

(Dizer que f é derivável, portanto, requer que todo ponto de D seja interior, isto é, que D seja aberto.)

Qualquer taxa de mudança é um exemplo de derivada. Assim, a velocidade instantânea de um ponto móvel como derivada de sua posição ao longo de uma trajetória é apenas o primeiro exemplo. Podemos considerar, também, a aceleração como derivada da função velocidade; a inflação como derivada do preço (também em função do tempo); a aceleração ou desaceleração da própria inflação; a taxa de expansão ou contração demográfica de uma população (digamos, em uma cultura de bactérias), etc.

Por exemplo, os físicos perceberam que a velocidade de desintegração do urânio, em cada instante de tempo, é proporcional à quantidade de urânio existente, ou seja, ao tamanho da amostra. Suponhamos que, em cada instante t, a amostra de urânio seja de quantidade $R(t)$ em uma medida adequada (quilogramas ou mols). Então a derivada $R'(t_0)$ é proporcional ao valor $R(t_0)$. A constante de proporção deverá ser negativa, porque $R'(t_0) < 0$ (é uma diminuição) enquanto $R(t_0) > 0$ (é uma quantidade).

Exemplos

- $f(x) = x^2$: temos $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a$.
- $s(y) = \sqrt{y}$: temos

$$s'(a) = \lim_{y \to a} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{y - a} = \lim_{y \to a} \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ se } a > 0.$$

- $g(x) = |x|$: temos $g'(a) = \begin{cases} -1 \text{ se } a < 0; \\ 1 \text{ se } a > 0; \end{cases}$ não deriv. em 0 porque $\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \pm 1$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Portanto, a função s acima não é derivável, mas é derivável em $\mathbb{R}^{>0}$.

Notas

Para funções de uma var., *derivável* e *diferenciável* são sinônimos.
Atenção! $f'(a) \not\equiv f(a)' = 0$.
Notações:

- $f'(a)$ que se lê "f-linha de a";
- $\dot{f}(a)$ quando a variável independente mede "tempo";
- $\dfrac{df}{dx}(a)$ para mostrar a variável com resp. à qual se derivou.

Esta notação vem de

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta f_{(\text{em } a)}}{\Delta x_{(\text{em } a)}}.$$

Sinta-se à vontade para não utilizar a notação pontilhada $\dot{f}$, mas quando o texto ou o exercício exigirem o uso do ponto, tome bastante cuidado com o que lê e com o que escreve: *tenha certeza de que o seu ponto é legível!*

Neste momento, a notação diferencial $\frac{df}{dx}$ é apenas um bloco ou "caixa preta", não uma fração. Assim, não faz sentido "passar dx multiplicando" e trabalhar isoladamente com df, dx. Isso será feito mais tarde, no tópico de integração, sob regras estritas.

Alertamos também que o correto uso da notação é importantíssimo! Como veremos que a derivada de uma constante é zero, temos que se $f(2) = -3$ então $f(2)' = (-3)' = 0$; porém, $f'(2)$ pode ser qualquer outro número.

Ponha $h = x - a$: temos $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$ e

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Isso facilita muitas contas.

Na prática, usa-se x (variável) em vez de a (ponto) porque se quer *função derivada* (futuramente).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$g(x) = e^x$: temos

$$g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{e^2e^h - e^2}{h} = e^2 \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^2.1 = e^2.$$

Exemplo

$x(t) = \operatorname{sen} t$: temos

$$\dot{x}(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3+h)-\operatorname{sen} 3}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\cos h + \cos 3 \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 3}{h} = \\ = (\operatorname{sen} 3) \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + (\cos 3) \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \\ = (\operatorname{sen} 3).0 + (\cos 3).1 = \cos 3.$$

Observe na função seno, por exemplo, que utilizar o h foi muito mais fácil que trabalhar diretamente com o quociente $(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3)/(x-3)$.

Pratique bastante a derivação com h, procurando exercícios em seu livro de Cálculo! Caso a letra h seja o nome da função ou ocorra na expressão a ser derivada, tente usar a letra η.

Exercício

Calcule as derivadas (se possível) em 0 e 1 usando limite:

- $f(x) = x^3$;[a]
- $s(t) = 1/t$;[b]
- $g(x) = e^x$;[c]
- $x(t) = \operatorname{sen} t$.[d]

6.2 Interpretação geométrica

Além da motivação mecânica para a derivada, em termos de taxa de variação, existe também a motivação geométrica, que introduziremos agora e retomaremos com rigor ao estudar a "melhor aproximação linear à função".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$: "limite de retas secantes". (Diagrama na lousa.)

O coeficiente angular da tangente é o limite $f'(a)$.

Os pontos (x, y) da tangente satisfazem $\dfrac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$, ou seja, a equação da reta é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

(Cuidado com as letras x, y em cada caso!)

Como só temos um ponto conhecido na reta tangente, utilizamos outros pontos do gráfico da função, que definem retas secantes para explorarmos.

Note que o ponto $(a, f(a))$ é quem pertence ao gráfico da função e é por onde a reta tangente deve passar, não o ponto a no domínio da função (identificado com $(a, 0)$ no eixo das abscissas). Porém, é costume falar simplesmente da "tangente em a".

Dado um ponto (a, b) e uma função f, *verifique antes de mais nada* se (a, b) pertence ao gráfico de f, caso contrário, a equação do slide não se aplica! Essa verificação consiste em dois itens: (1) se a pertence ao domínio de f e (2) se $b = f(a)$. Além disso, obviamente, é preciso que f seja derivável em a.

Se for preciso encontrar a reta normal, determine a tangente e siga os procedimentos usuais para encontrar a normal, cujo coeficiente angular será $-1/f'(a)$.

Exercício

Determine as equações das retas tangentes em 0 e $\pi/3$:

- $f(x) = x^3$;[a]
- $s(t) = 1/t$;[b]
- $g(x) = e^x$;[c]
- $x(t) = \operatorname{sen} t$.[d]

6.3 Regras de derivação simbólica

Até aqui, utilizamos a própria definição de derivada por limite, ou uma transformação desse limite, para calcular derivadas. Agora, veremos regras

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

de cálculo que oferecem um *algoritmo* ("receita de bolo") para reduzir o cálculo de derivadas ao das funções fundamentais. Estas serão listadas e convirá você memorizá-las.

É importante calcular derivadas por meios mais práticos que a definição; porém, note duas coisas: (1) Estas regras práticas são consequências da definição de derivada por limite, embora pareçam "surgidas do nada". (2) Justamente por não guardarem semelhança com a derivação via limite, as regras não estimulam as aplicações e motivações mecânica e geométrica da derivada, ou seja, há boas razões para aprender a definição como ela é.

A Regra da Cadeia terá interesse especial, porque também é aplicada corriqueiramente.

Trabalharemos com abuso da notação:

- Derivaremos *expressões* (veremos a "função derivada" depois);
- escreveremos (expressão em x)$'$.

Onde escrevermos simplesmente $(h(x))'$ para significar $h'(x)$ com h subentendida, tome cuidado: Essa prática é comum nos livros, mas a variável (aqui, x) deve estar livre. Se tomar algum valor, então a derivada é zero, porque a imagem é constante: $h(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow h'(3) = \cos 3$, mas $(\operatorname{sen} 3)' = 0$.

Portanto, para calcular a derivada de f em algum ponto específico a usando as regras práticas, primeiro determine $f'(x)$ em geral, depois substitua o valor de a em $f'(a)$.

Juntas, as regras de derivação e a lista de derivadas das funções clássicas fornecem um algoritmo para calcular a imensa maioria das derivadas de interesse. Praticar, porém, continua tão essencial como foi com os limites: procure exercícios adicionais no seu livro de Cálculo! Também não se preocupe em tentar decorar tudo imediatamente; leve sempre a tabela ao seu lado quando praticar.

Você pode conhecer as origens e demonstrações destas regras e tabelas na "Introdução à Derivação".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Tabelas de derivadas

Memorize! ($c, r \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$)

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^r	rx^{r-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a \lvert x\rvert$	$1/(x \ln a)$

Note que a regra das potências vale, em princípio, para $x > 0$ e inclui raízes (transforme-as em expoentes fracionários) e a forma $1/x^k$ (transforme-a em x^{-k}). Em cálculos, convém sempre simplificar esses elementos, escrevendo-os como potências. Quando a raiz é ímpar, vale para todo $x \in \mathbb{R}$; quando a potência é negativa, vale para todo $x \neq 0$.

Perceba, também, a relevância do número e: com essa base específica, as derivadas da exponencial e do logaritmo não requerem um "coeficiente de correção"; exp é sua própria derivada.

Finalmente, distingua entre a derivação de uma potência (expoente constante) e de uma exponencial (base constante). Quando a variável aparece tanto na base como no expoente, utilizaremos o expediente $f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x) \ln f(x)\big)$ com a Regra da Cadeia.

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x = 1/\cos^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x = -1/\operatorname{sen}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x/\cos^2 x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x = -\cos x/\operatorname{sen}^2 x$

Cuidado com sinais quando derivar funções trigonométricas!

Você pode optar por memorizar somente as derivadas do seno e do cosseno, deduzindo as demais (e também das inversas) com as regras operacionais que veremos a seguir.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen}^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg}^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\csc^{-1} x$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Renovamos o alerta: $\operatorname{arcsen} x \equiv \operatorname{sen}^{-1} x \neq (\operatorname{sen} x)^{-1}$.

Regras operacionais

Para f_i, f, g deriváveis:

Termo	Derivada
$c_1 f_1 \pm \ldots \pm c_k f_k \pm c$	$c_1 f_1' \pm \ldots \pm c_k f_k' \pm 0$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$ (atenção!)
$\dfrac{f}{g}$ se g não se anula	$\dfrac{f'g - fg'}{(g)^2}$
$\dfrac{1}{g}$ se g não se anula	$-\dfrac{g'}{(g)^2}$

Como no caso de limites, as regras valem somente quando f, g são deriváveis. Por exemplo, $|x-1|$ não é derivável em 1, mas $|x-1|-|x-1| = 0$ é derivável (porque é constante); o que não podemos escrever é $|x-1|'-|x-1|' = 0'$.

Para derivar um produto de vários fatores, derivamos cada fator, multiplicando-o pelos demais inalterados, e somamos tudo:

$$(fghs)' = f'ghs + fg'hs + fgh's + fghs'$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos

- $f(x) = 7x^5 - 2\operatorname{sen} x + \pi e^x \Rightarrow f'(x) = 35x^4 - 2\cos x + \pi e^x$.
- $g(x) = (e^x + x)\cos x \Rightarrow g'(x) = (e^x + 1)\cos x + (e^x + x)(-\operatorname{sen} x)$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. (Memorize!)

Observe como foi mais fácil utilizar a regra do quociente para derivar $\operatorname{tg} x$ em vez de calcular $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x)$ ou memorizar a tabulação. Isso se aplica também a sec, csc e cot se você as utiliza apenas esporadicamente.

Note também que, em um certo ponto, podemos simplificar a expressão de um modo diferente e obter $(\operatorname{tg} x)' = 1 + (\operatorname{tg} x)^2$, ou seja, a mesma resposta pode assumir várias formas, apesar do procedimento de derivação ser algorítmico. Nesse caso, vemos que $\operatorname{tg} x$ satisfaz $y' = 1 + y^2$, que é uma "equação diferencial ordinária"; essas equações serão estudadas em um curso específico.

- $[(x^3 + 8\cos x)(2e^x - 3\sqrt[7]{x} + 5)]' =$

  $= (3x^2 - 8\operatorname{sen} x)(2e^x - 3\sqrt[7]{x} + 5) + (x^3 + 8\cos x)(2e^x - \frac{3}{7}x^{-6/7} + 0)$.

- $x(t) = -3t^5\cos t + \frac{6}{t^3}e^t - \sqrt[9]{t^4}e^t\cos t \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dot{x}(t) = (-15t^4\cos t + 3t^5\operatorname{sen} t) + (-\frac{18}{t^4}e^t + \frac{6}{t^3}e^t) -$

  $- \left(\frac{4}{9}\sqrt[9]{\frac{1}{t^5}}e^t\cos t + \sqrt[9]{t^4}e^t\cos t - \sqrt[9]{t^4}e^t\operatorname{sen} t\right)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Derive:

- $2t^2e^t + \frac{1}{t^4}\operatorname{sen} t - \sqrt[3]{t}\operatorname{tg} t$;[a]
- $(4e^x + 2/x^3)(3\operatorname{sen} x)\sqrt[5]{x}$;[b]
- $\dfrac{5x\cos x}{\exp x + \operatorname{sen} x}$.[c]

Exercício

Derive $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ apenas com as regras operacionais e as derivadas tabuladas de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Confira seus resultados com a tabulação.

Procure mais exercícios para praticar! Tome especial cuidado com os sinais!

Discussão extraordinária: Finalmente, vamos considerar a seguinte questão: Sabemos derivar somas de um número finito de funções, bastando derivar cada termo e somar; mas e quanto a séries? Podemos derivar cada termo e somar a nova série? Já que séries são limites de somas parciais (finitas) de funções, enquanto derivadas também são limites, a pergunta que se coloca é se podemos inverter a ordem de dois operadores de limite.

Esse é um problema importante que deve ser tratado em cursos de Análise; frequentemente, a resposta reside no conceito de convergência uniforme que comentamos em "Análise Básica".

No caso de derivação, a situação é ainda mais complicada. Por exemplo, a sequência de funções $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)$ converge a zero, mesmo uniformemente (por quê?), mas a sequência de derivadas $f_n'(x) = \cos(nx)$ não converge (sequer simplesmente) nos pontos $x = r\pi$ com $r \in \mathbb{Q}^{\neq 0}$.

A resposta correta é esta: Dada uma sequência de funções $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo fechado e assumindo cada f_n de classe C^1, se existir $a \in I$ de modo que a sequência numérica $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ convirja e se as derivadas f_n' convergirem uniformemente a uma $g\colon I \to \mathbb{R}$, então existe uma $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $f' = g$ e para a qual as f_n convergem uniformemente. Assim, $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ desde que as *derivadas* convirjam uniformemente e as funções originais convirjam em um ponto; não basta a convergência uniforme das originais.

Para séries funcionais, portanto, temos: Dadas $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo fechado e assumindo que cada f_n é de classe C^1, se existir $a \in I$ de

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

modo que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ convirja e se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ convergir uniformemente, então $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ também converge uniformemente a uma função de classe C^1 e $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$. □

No caso particular de séries de potências, obtemos:

Derivação de séries de potências

Seja R raio converg. de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Então $f\colon\ ]x_0-R, x_0+R[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, é derivável e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

é derivada termo a termo, com mesmo raio R.

Iteradamente: f é de classe C^∞ e $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$.

Trata-se de manipular a definição de raio de convergência, trabalhando com os coeficientes originais a_n (de ordem n) e os novos na_n (de ordem $n-1$; multiplique a série derivada por $x-x_0$ para corrigir para ordem n). Uma vez mostrado que ambas as séries têm o mesmo raio, precisamos ainda mostrar que uma é derivada da outra, para o que precisamos de convergência uniforme. Esta é válida em cada subintervalo fechado I de $]x_0-R, x_0+R[$, então podemos realizar a comparação nesse I e, como ele é arbitrário, obtê-la para todo o domínio.

Se pudermos derivar uma vez, caso em que obtemos o mesmo raio de convergência, então podemos fazê-lo mais vezes. Desse modo, toda função definida via séries de potências é de classe C^∞.

Neste momento, as expressões que sabemos derivar são apenas combinações polinomiais de algumas funções puras; vejamos como a Regra da Cadeia resolverá expressões concatenadas:

Regra da Cadeia

Se f, g são deriváveis em $a, f(a)$ resp., então

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a).$$

(Detalhes para $g \circ f$ existir?)

Não esqueça de multiplicar pela "cauda" $f'(a)$!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Por indução, podemos derivar a composição de três ou mais funções:

$$(h \circ g \circ f \circ s)' = (h' \circ g \circ f \circ s) \times (g' \circ f \circ s) \times (f' \circ s) \times s'$$

Na prática: comece a derivar "por fora".

Exemplos

- $[\operatorname{sen}(2\pi t)]' = \cos(2\pi t) \cdot 2\pi = 2\pi \cos(2\pi t)$.
- $[(x^6 + 3x + 7)^4]' = 4(x^6 + 3x + 7)^3 \cdot (6x^5 + 3)$.
- $(\cos x^2)' = (-\operatorname{sen} x^2)2x$.

- $[\operatorname{sen}(2\ln(6\sqrt{x}))]' = \cos(2\ln(6\sqrt{x})) \cdot \dfrac{2}{6\sqrt{x}} \cdot 3x^{-1/2}$.
- $[(3x+7)^{5x+1}]' = [\exp((5x+1)\ln(3x+7))]' =$

$$= \exp((5x+1)\ln(3x+7)) \cdot [(5x+1)\ln(3x+7)]' =$$
$$= (3x+7)^{5x+1}[5\ln(3x+7) + (5x+1)\tfrac{1}{3x+7}3].$$

Em outras palavras, ao derivar expressões compostas, sempre derive também o "recheio", sucessivamente se necessário.

Exercício

Derive:

- $\cos(\operatorname{sen}(\pi x))$;[a]
- $(\operatorname{sen}(5^{t^4+\operatorname{sen}(2\pi t)}))^7$;[b]
- $\dfrac{5(x^2-x)\cos(x^2-x)}{\exp(x^2-x)+\operatorname{sen}(x^2-x)}$ — o que você nota aqui?[c]
- $[\ln(12-3x^8)]^5$;[d]
- $(2x^4 - 3\cos x)^{5x-3+\sqrt{2x}}$;[e]
- $\sqrt{t + \log_7(2^t + 2\pi \operatorname{sen}^{-1} t)}$.[f]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Cálculos para função definida por casos: Este é um exemplo tradicional de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por casos que é derivável em todos os pontos, mas sua derivada não é contínua (diremos que "f não é de classe C^1"). É a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(x^{-1}) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Fora de 0, a expressão que define f é composta de funções contínuas, então f é contínua; a continuidade em 0 é dada, por exemplo, pelo Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Também fora de 0, podemos derivar a expressão definidora com uso das regras de derivação:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}(x^{-1}) - \cos(x^{-1}),$$

em que simplificamos o segundo termo após o uso da Regra da Cadeia. Já em 0, devemos recorrer à definição por limite, lembrando então que $x \to 0$ requer $x \neq 0$, o que, por sua vez, determina qual expressão utilizar da definição de f:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(x^{-1}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(x^{-1}) = 0,$$

novamente se invocando Confronto.

Verificamos que não existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$, porque o termo $\cos(x^{-1})$ oscila com amplitude constante, então f' está definida, mas é descontínua, em 0. □

Derivação implícita

Suponha $f(x)$ solução de $x^5 + y^3 = \frac{9}{2}xy$, isto é,

$$x^5 + (f(x))^3 = \tfrac{9}{2} x\, f(x).$$

Se $f(1) = 2$, como determinar $f'(1)$ sem resolver $f(x)$?

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(1) Derive quanto a x os dois lados:

$$5x^4 + 3y^2 \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{9}{2}(y + x\tfrac{dy}{dx}).$$

(2) Isole y':

$$y' = \tfrac{dy}{dx} = \frac{9y - 10x^4}{6y^2 - 9x}.$$

(3) Substitua $x = 1$, $y = 2$: verifique $1^5 + 2^3 = \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 2$ e obtenha

$$f'(1) = \frac{9 \cdot 2 - 10 \cdot 1^4}{6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 1} = \tfrac{8}{15}.$$

Esse tipo de problema ocorre quando um ponto percorre uma trajetória forçada; trabalharemos assim na próxima seção.

Note que y' surge na expressão trabalhada justamente em vista da Regra da Cadeia.

Observe que sempre assumimos que tais funções, representadas por uma variável em termos de outra, também são deriváveis, para então aplicarmos a Regra da Cadeia. Os livros de Cálculo podem apresentar (ou omitir!) diversos resultados que garantem a derivabilidade dessas funções, sob várias hipóteses, sendo o "Teorema da Função Implícita" um dos mais importantes.

Podemos fazer o mesmo com as principais funções inversas. Se f, f^{-1} são deriváveis em $a, f(a)$ resp., então $(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}$. (Detalhes para f^{-1} existir? Ser derivável?) De fato, $(f^{-1} \circ f)(x) = x \Rightarrow (f^{-1} \circ f)' = 1$, enquanto $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$ pela Regra da Cadeia. Veja que não é preciso verificar que $f'(a) \neq 0$, *já assumindo* f^{-1} *derivável em* $f(a)$, porque isso é implicado pela expressão obtida: um produto igual a 1 requer que seus fatores sejam não-nulos.

Exemplos com funções inversas

- $(\ln x)' = 1/x$ porque $y = \ln x \Rightarrow e^y = x \Rightarrow e^y y' = x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ (substitua $y(x)$ para forma final).
- $(\operatorname{sen}^{-1} x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$ porque $y = \operatorname{sen}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{sen} y \Rightarrow 1 = (\cos y)y' \Rightarrow y' = 1/\cos y = \ldots$ (Gráfico na lousa.)
- $(\operatorname{tg}^{-1} x)' = (1+x^2)^{-1}$ porque $y = \operatorname{tg}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y \Rightarrow 1 = \frac{y'}{\cos^2 y} \Rightarrow y' = \cos^2 y = \ldots$ (Gráfico na lousa.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Derive $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$ utilizando apenas derivação implícita e as derivadas tabuladas para as funções trigonométricas. Confira seus resultados com a tabulação.

6.4 Taxas relacionadas (*related rates*)

Tanto derivação implícita como a Regra da Cadeia encontram suas aplicações mais importantes neste tópico.

Procedimento básico

- Leia cuidadosamente e faça diagrama.
- Introduza notação (dê nome aos bois).
- Essas grandezas têm derivadas quanto ao *tempo.*
- Traduza enunciado em equações com derivadas.
- Substitua informações e resolva...

Atenção: Somente substitua as informações numéricas do problema *após* estabelecer as relações entre as derivadas envolvidas. Caso contrário, você acabará por derivar constantes!

Exemplos clássicos

Um balão esférico é enchido com hélio. Quando o diâmetro é 4 m, ele cresce a 0,2 m/s. Qual é o crescimento do volume nesse momento?

Temos $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, donde $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\pi D^2 \frac{dD}{dt}$ e, no instante especificado, $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\pi 4^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

Observe que, para resolvermos o problema, deduzimos do enunciado que o balão mantém-se sempre esférico. O cálculo pedido informa com qual velocidade o gás hélio é inserido no balão, o que deverá ser controlado por uma válvula de segurança.

Note que a expressão original do volume em termos do diâmetro não indica como envolver o tempo nos cálculos. Pela Regra da Cadeia, porém,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(D)}{dD} \cdot \frac{dD}{dt}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Uma escada de 3 m encostada a um poste vertical começa a deslizar para baixo. Quando a base está a 2 m do poste e afasta-se a 0,3 m/s, quão rápido o operário no topo da escada está caindo? (Diagrama na lousa, com x, y distância e altura resp.)

Temos:

$$x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$
$$\Rightarrow \dot{y} = -x\dot{x}/y = -2 \cdot 0{,}3/\sqrt{3^2 - 2^2} \approx -0{,}27\,\text{m/s}.$$

Note que em lugar algum dissemos que o movimento feito pela base da escada é uniforme; portanto, não podemos escrever $x(t) = 2 + 0{,}3t$. Porém, uma fórmula para o movimento sequer é necessária para resolver o problema.

De fato, no momento de impacto (quando $y \to 0$), vemos que $\dot{y} \to \infty$, ou seja, a velocidade de impacto é muitíssimo alta, aparentemente contradizendo nossa intuição. O que resolve essa discrepância são os fatos de que $\dot{x}$ também não é fixo e pode convergir a 0 e o movimento real ser mais complexo que o deslocamento estritamente vertical do topo da escada.

Exercícios clássicos

Um foguete é lançado verticalmente a 5 km do observador. Quando o ângulo de elevação observado é 60°, ele muda a 3°/s. Qual é a velocidade de ascensão do foguete?[a]

Atenção: converta os dados para radianos!

Um gás ideal em um pistão selado, inicialmente a 10 atm e 50 cm^3, sofre uma contração isotérmica constantemente a 10 cm^3/s. Quais são a pressão e sua variação instantânea após 2 s?[b]

Lembre-se que, em uma transformação isotérmica, temos PV constante; pelo enunciado, também $\dot{V}$ é constante, mas não $\dot{P}$. Após 2 s, sobraram apenas 30 cm^3 de volume e podemos calcular facilmente a nova pressão. Já quanto às variações, mostre que $\dot{P}V + P\dot{V} = 0$ e tome cuidado com o sinal de $\dot{V}$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Uma ferrovia e uma rodovia, ambas retilíneas, encontram-se em 90°. Um trem e um carro dirigem-se à intersecção com velocidades de 200 km/h e 160 km/h respectivamente. Quando o trem dista 1200 m da intersecção e o carro apenas 500 m, qual é a velocidade de aproximação entre os dois?[c]

(Não se preocupe, eles não colidirão — por quê?)

Para resolver esse exercício, monte uma função distância entre o trem e o carro, usando funções distância de cada um à intersecção das vias, todas com variável "tempo"; use a Regra da Cadeia para derivar essa função em termos do tempo.

Muitos mais problemas podem ser formulados e resolvidos assim. Procure-os!

6.5 Melhor aproximação linear e Newton–Raphson

Suponha f derivável em a. Objetivo: aproximar f ao redor de a com $L(x) = mx + b$; determinaremos m, b.

Cuidado: L específica para f e a!

Erro cometido: $E(x) = f(x) - L(x)$.

Minimizá-lo em a: $E(a) = 0$, donde $b = f(a) - ma$.

Por "minimizar", tanto nesse slide como no próximo, entendemos minimizar em termos absolutos, isto é, sem o sinal. O valor mínimo que um módulo pode assumir é zero e, assim, tratamos de *impor* que o erro cometido seja zero para obter m e b.

Erro relativo: $\dfrac{E(x)}{x-a}$. Minimizá-lo em a:

Não podemos fazer $x = a$, então impomos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{E(x)}{x-a} = 0$. Vem

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (mx + f(a) - ma)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - m,$$

donde $m = f'(a)$.

Obtemos

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

(função da reta tangente!).

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo clássico

Estimar $\sqrt{10}$?
Tomamos $f(x) = \sqrt{x}$ e $a = 9$ (quadrado).
Então $L(x) = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(x-9)$ e obtemos $L(10) = 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 \approx 3{,}17$.

Exercício

Linearize a função $\sqrt{x}$ em 4 e use-a para estimar $\sqrt{4{,}05}$.
Repita o processo para $\sqrt{x+3}$ em 1.
Compare suas estimativas com o resultado de uma calculadora.

Veja que $f(x)-f(a) \approx L(x)-f(a) = f'(a)(x-a)$. Desse modo, podemos também estimar a *variação* de f. Por exemplo, suponha que meçamos o diâmetro de uma esfera, obtendo 2 cm com um erro máximo de 1 mm para mais ou para menos. Então o volume da esfera é $\frac{\pi}{6}2^3\text{cm}^3$, ou melhor, está entre $\frac{\pi}{6}(1{,}9)^3\text{cm}^3$ e $\frac{\pi}{6}\pi(2{,}1)^3\text{cm}^3$. Aqui, temos a opção de subtrair esses extremos do valor central e, assim, obter o erro máximo cometido, mas também de estimá-lo como $[\frac{3\pi}{6}2^2 \times 0{,}1]\text{cm}^3$ utilizando a expressão $f'(a)(x-a)$. A segunda possibilidade frequentemente envolve menos cálculos, especialmente quando $f1$ já deve ser calculada para outras aplicações.

Função marginal: Em Economia, atenta-se ao caso $x = a+1$, ou seja, ao que acontece com f quando se aumenta o argumento por uma unidade. A variação de f é dita *marginal*, nesse caso, e iguala $f'(a)$ numericamente. Por isso, a derivada de uma função custo expressa diretamente a função custo marginal. □

A melhor aproximação linear também serve para motivar a Regra de l'Hospital no caso $0/0$, embora não dê uma demonstração rigorosa: Suponha que $f(x), g(x) \to 0$ quando $x \to a$; por continuidade, temos $f(a) = g(a) = 0$. Substituindo, obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(a) + f'(a)(x-a)}{g(a) + g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

• Este método é a primeira de várias técnicas no Cálculo Numérico e, de fato, é usado para originar o próximo método a ser estudado, o de Halley:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Método de Newton–Raphson

Objetivo: aproximar uma solução de $f(x) = 0$, com tolerância ε.

(1) Escolha estimativa inicial x_0.

(2) Calcule iteradamente $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

(3) Quando $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, temos estimativa x_{n+1} dentro da tolerância ε.

Sua motivação é esta: em cada passo, substitua f por sua melhor aproximação linear em x_n e encontre x_{n+1} que seja raiz dessa aproximação.

Há muita coisa que pode dar errada no meio do caminho: podemos encontrar uma derivada $f'(x_n) = 0$; a sequência pode não convergir; x_0 mal escolhido pode induzir uma sequência que se distancia cada vez mais da raiz verdadeira da função; etc. Feito esse alerta, deixamos os detalhes para o curso de Cálculo Numérico.

Exercício

Aproxime uma solução de $\cos x = x$ (em radianos), com estimativa inicial 1 e tolerância 10^{-3}.[a]

Qual função deve ser utilizada?

Utilize uma calculadora ou planilha eletrônica.

Cuidado: sua calculadora usa radianos ou graus?

6.6 Propriedades e valor médio

Nem toda função é derivável, de modo que a derivabilidade é uma propriedade com diversas consequências, dentre elas o Teorema do Valor Médio que, por sua vez, subsidia formalmente a interpretação mais comum do sinal da derivada.

Se f é derivável (em a), então f é contínua (em a). Ou seja: função com salto não é derivável no salto.

Note: $|\cdot|$ é contínua, não é derivável em 0.

Prova: $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a).0 = 0.$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Esse critério de continuidade é útil para descartamos imediatamente várias "derivadas" impossíveis de calcular! Ele é aplicado em algumas demonstrações e mostra que as classes de derivabilidade, mais abaixo, formam uma cadeia decrescente.

Suponha $f\colon D \to \mathbb{R}$ derivável (em todo D). Temos

$$f'\colon D \to \mathbb{R},\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

função derivada de f.

Como função, também pode ser derivável, com derivada f''.
Se pudermos repetir, obtemos f''', $f^{(4)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$
$f^{(n)}$ é a *n-ésima derivada, ou derivada de ordem n* de f.

Isso significa, apenas, que usamos a definição pontual de derivação para defininir uma nova função (a função-linha), cujas propriedades podemos novamente estudar. Até aqui, substituímos o valor de a na conta. Agora, escreveremos x no lugar de a arbitrário.

O melhor meio de calcular as derivadas de diversas ordens é passo a passo: liste cada derivada abaixo da função anterior, derivando repetidamente, sem tentar fazê-lo de cabeça!

Classes de continuidade

C^k é a coleção das funções f tais que:

- f é derivável até ordem k
- *e $f^{(k)}$ é contínua.*

C^∞ é a coleção das funções com derivadas de todas as ordens.
Temos $C^0 \supseteq C^1 \supseteq C^2 \supseteq \ldots \supseteq C^\infty$.

(C^0 é a classe das funções contínuas, não necessariamente deriváveis. C^1 é a classe das funções deriváveis cuja derivada é contínua; é muito importante em Análise.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Rolle

Partícula com posição $s(t)$ no instante $t \in [a, b]$.

Suponha $s(a) = s(b)$.

Então, em algum momento, a partícula "parou e voltou atrás".

Ou seja, para algum $a < t^* < b$, temos $\dot{s}(t^*) = 0$.

Visto de outro modo: Gráfico de s sobe e desce, portanto, fica horizontal em algum ponto: tangente com coeficiente angular zero. (Gráfico na lousa.)

A única hipótese no Teorema de Rolle é que s seja derivável. Embora pareça intuitivo, ele requer um pouco de maquinário para ser provado, mas é uma boa oportunidade para revisar a aplicação de resultados que já estabelecemos:

Demonstração: Inicialmente, podemos assumir que s não é constante, do contrário sua derivada é sempre zero. Assumindo que s é derivável, ela também é contínua e Weierstrass afirma que s assume valores máximo e mínimo em $[a, b]$, digamos nos pontos t_m e t_M. Como s não é constante, um deles é diferente de a e b: suponhamos que seja t_m (o caso t_M é análogo: releia a partir daqui fazendo as substituições devidas). Isso significa $a < t_m < b$, ou seja, temos espaço em ambos os lados de t_m para trabalhar. Trabalhe agora com $h \to 0$; temos sempre $s(t_m + h) \geqslant s(t_m)$. Assim,

$$\lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(s(t_m + h) - s(t_m)) \geqslant 0$$

porque ambos numerador e denominador são positivos, enquanto

$$\lim_{h \to 0^-} \tfrac{1}{h}(s(t_m + h) - s(t_m)) \leqslant 0$$

porque numerador e denominador têm sinais opostos. Como s é derivável, existe o limite $\dot{s}(t_m)$, de modo que esses dois limites laterais existem e são iguais (entre si e a $\dot{s}(t_m)$). Sendo um $\geqslant 0$ e outro $\leqslant 0$, forçosamente temos todos $= 0$, como queríamos. □

A grande utilidade do Teorema de Rolle reside em provar o TVM. De fato, ele é apenas um caso particular! Vamos enunciar o TVM com cuidado:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Teorema do Valor Médio (TVM, Lagrange)

Assuma que f é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Mecanicamente: a velocidade média é realizada em algum instante.

Geometricamente: a reta pelos extremos é paralela a alguma tangente. (Gráfico na lousa.)

Como com o TVI, note que o enunciado não diz como determinar c (você deverá resolver a equação $f'(x) = K$ por outros métodos), nem quantos valores de c existem.

Você provará o TVM aplicando Rolle à função

$$s(x) = f(x) - (x - a) \cdot \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(experimente!), observando que essa s satisfaz as mesmas condições de derivabilidade e continuidade.

O TVM é muito útil tanto na teoria, como degrau nas construções rigorosas do Cálculo e da Análise, como na prática. Essa "prática", porém, ainda é um tanto teórica: o TVM pode ser usado para deduzir informações a partir de estimativas do comportamento de uma função.

Exercício

Suponha $f(-1) = 2$ e $5 \leqslant f' \leqslant 7$. Determine os valores possíveis máximo e mínimo para $f(3)$.[a]

Por mais um exemplo, discutiremos as funções com derivada zero:

Sabemos que se uma função é constante, então sua derivada é a função nula. Para ver que a recíproca não é verdade, consideremos $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, ou seja, $f(x)$ é o maior inteiro inferior a x. Removemos do domínio justamente seus pontos de descontinuidade, então f é uma função "em patamares" e localmente constante. Portanto, ela tem derivada nula, mas não é constante. Obviamente, há algo patológico aqui: o domínio é desconexo; o que acontece se consistir de um único intervalo?

Nesse caso (função f contínua em um intervalo e derivável em seu interior), se $f' = 0$ então f é constante. Há vários modos de intuí-lo ou prová-lo:

(1) Qualquer reta tangente tem coeficiente angular zero, ou seja, é horizontal. (Mas a função poderia ser muito patológica e qualquer gráfico ser muito enganador!)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(2) Quando conhecermos integração, poderemos escrever

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)\,ds = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} 0\,ds = f(x_0) + 0.$$

(3) Pode-se até utilizar o princípio dos intervalos encaixantes para uma demonstração.

Porém, um modo poderoso é usar o TVM:

Exemplo teórico

Seja I intervalo. Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua e $f' = 0$ no interior de I, então f é constante.

De fato: dados $x, y \in I$ com $x < y$, temos $[x, y] \subseteq I$ e o TVM aplicado a $f|_{[x,y]}$ dá $c \in]x, y[$ com $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$.

Corolário: Se $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis com $f' = g'$, então $g = f + K$ para algum $K \in \mathbb{R}$, bastando derivar $g - f$ para mostrar. □

Exercício

Suponha que I é um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua em I e derivável no interior de I. Use o TVM para mostrar que:

- se $f' \geqslant 0$ então f é crescente;
- se $f' > 0$ então f é estritamente crescente;
- se $f' \leqslant 0$ então f é decrescente;
- se $f' < 0$ então f é estritamente decrescente.

(Utilize limites para demonstrar recíprocas não-estritas.)

Novamente, você pode servir-se de raciocínios intuitivos para absorver essas regras: Se $f' > 0$ então toda reta tangente tem coeficiente angular estritamente positivo, ou seja, é inclinada "para cima" e então f deve ser estritamente crescente. Em termos de integração, teremos $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(s)\,ds > 0$.

Veremos que as recíprocas são válidas somente nos casos não-estritos; para prová-las, o argumento é semelhante aos cálculos na demonstração do Teorema de Rolle.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

A função $g(x) = -1/x$ é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, \infty[$, mas **não** é crescente.

Por quê? No que isso viola o exercício anterior?[a]

Vamos encerrar esta apresentação enunciando um teorema similar: o "TVM de Cauchy". Ele afirma que, se ambas $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazem as condições do TVM, então existe $a < c < b$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c),$$

ou ainda $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ se os denominadores não forem nulos.

Para prová-lo, basta aplicar o Teorema de Rolle à função

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x);$$

também se pode utilizá-lo para deduzir o TVM original pondo-se $g(x) = x$.

Esse Teorema de Cauchy é geometricamente inspirado por considerações análogas às do TVM, mas considerando, em vez de uma curva dada pelo gráfico de uma função f, uma curva parametrizada $(f(t), g(t))$ onde as coordenadas são dadas em função de uma terceira variável.

Com ele em mãos, você está apto a estudar demonstrações rigorosas da Regra de l'Hospital.

6.7 Polinômios de Taylor

Objetivo: substituir $f\colon I \to \mathbb{R}$ por aproximações polinomiais.

Suponha I intervalo aberto, $a \in I$ e f derivável até ordem $N + 1$. Assim, cada $f^{(k)}$ existe e é contínua, $0 \leqslant k \leqslant N$.

A melhor aprox. 1ª ordem ao redor de a é

$$f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

(já escrita como polinômio centrado em a).

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Busquemos o melhor polinômio de grau N:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k$$

Erro cometido: $E_N(x) = f(x) - P_N(x)$.

Digamos que queremos $\lim_{x\to a} \dfrac{E_N(x)}{(x-a)^N} = 0$ (cf. discussão anterior).

Isso implica:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \text{ para } 0 \leqslant k \leqslant N$$

Há vários modos de mostrar essa implicação. O que faremos aqui é um pouco difícil, aplicando l'Hospital iteradamente, mas não requer uso de séries e sua derivação termo a termo. Após estudar esse tópico, você poderá retornar aqui e deduzir a fórmula para cada c_k diretamente.

Dedução extraordinária: Assumindo $\lim_{x\to a} \frac{E_N(x)}{(x-a)^N} = 0$, temos também $\lim_{x\to a} \frac{E_N(x)}{(x-a)^k} = 0$ para cada $0 \leqslant k \leqslant N$, porque se $k < N$ então basta multiplicar o "limitando" original por $(x-a)^{N-k}$ que vai a zero com $x \to a$.

Com $k = 0$, por substituição temos $\lim_{x\to a} E_N(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - c_0)$, que é zero se e somente se $c_0 = f(a)$, porque f é contínua.

Com $k = 1$, temos $\lim_{x\to a} \frac{E_N(x)}{x-a}$ da forma $0/0$ em vista do parágrafo anterior. Queremos que esse limite seja zero; de fato, será um número L_1 por l'Hospital se tivermos $\lim_{x\to a} \frac{E'_N(x)}{(x-a)'} = L_1$. Prosseguindo, temos

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - c_1 - c_2 \cdot 2\cancelto{0}{(x-a)} - c_3 \cdot 3\cancelto{0}{(x-a)^2} - \dots}{1} = 0 \Leftrightarrow c_1 = f'(a).$$

Aqui, utilizamos a continuidade de f'.

Com $k = 2$, temos $\lim_{x\to a} \frac{E_N(x)}{(x-a)^2}$ da forma $0/0$ também em vista do caso $k = 0$ e novamente queremos que esse limite seja zero. Por l'Hospital, será um número L_2 se tivermos $\lim_{x\to a} \frac{E'_N(x)}{[(x-a)^2]'} = L_2$. Contudo,

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a) - c_2 \cdot 2\cancelto{0}{(x-a)} - c_3 \cdot 3\cancelto{0}{(x-a)^2} - \dots}{2(x-a)}$$

ainda é da forma $0/0$, agora de acordo com o parágrafo anterior e a continuidade de f'. Novamente, por l'Hospital, será o mesmo L_2 se tivermos

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\lim_{x\to a} \frac{E_N''(x)}{[(x-a)^2]''} = L_2$. Mas

$$\lim_{x\to a} \frac{f''(x) - c_2\cdot 2 - c_3\cdot 6\cancelto{0}{(x-a)} - \dots}{2} = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Aqui, utilizamos a continuidade de f''.

Indutivamente, os casos anteriores ao caso k providenciam que os limites envolvidos sejam da forma $0/0$ e temos em geral:

$$\lim_{x\to a} \frac{E_N(x)}{(x-a)^k} \overset{\text{L'H } k \text{ vezes}}{=\!=\!=} \lim_{x\to a} \frac{E_N^{(k)}(x)}{k!} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} E_N^{(k)}(x) = 0.$$

Já que $E_N^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - k!\,c_k -$ "termos com $(x-a)$" e $f^{(k)}$ é contínua, vem $c_k = f^{(k)}(a)/k!$, para $0 \leqslant k \leqslant N$. □

Até aqui, supusemos que f é de classe C^N especificamente no ponto a. No próximo slide, ao tomar o limite, é necessário ter f de classe C^∞ em a.

Então a melhor aprox. polinomial a f de grau N ao redor de a é

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$$

Note: derivadas até N do polinômio em a são $f^{(k)}(a)$.

Se, para x fixo, $E_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} 0$, escrevemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$$

Exemplo: $\operatorname{sen} x$ e $a = 4$ no Wolfram Alpha.

Código para o Wolfram Alpha: series sin(x) at x=4. No quadro "Approximations about x = 4 up to order ...", clique em "More terms" (depois repita) para ver aproximações cada vez melhores. Divirta-se com outras funções!

• Note que podemos escrever $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)(x-a)^k/k!$ somente quando $E_N(x) \to 0$. Também é possível que a série não convirja, ou convirja para um valor diferente de $f(x)$, como veremos com uns "exemplos faltosos".

Se *definirmos* uma função usando uma série de potências, nosso cálculo sobre a derivação dessas séries diz que a série de Taylor dessa função é a

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

própria série original. (Compare, mais abaixo, com os "exemplos faltosos" de classe C^∞.) Concluímos que duas séries de potências com mesmo centro e convergentes em um intervalo aberto, caso definam a mesma função, têm os mesmos coeficientes: essa é a "unicidade da representação em série de potências".

Exercício

Escreva as séries de Taylor para estas funções:

- e^x com centro 0.[a]
- $\ln x$ com centro 1 ou $\ln(1+x)$ com centro 0.[b]
- $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ com centro 0.[c]
- $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ e $\frac{1}{1+x^2}$ com centro 0.[d]
- $\operatorname{tg}^{-1} x$ com centro 0.[e]

Use-as para escrever $\ln 2$ e $\pi/4$ como séries numéricas.[f]

(Atenção: raios de convergência específicos!)

(Nos exemplos abaixo, você achará a dedução completa para $\cos x$ e a série final para ln.)

Resto de Lagrange

$$E_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} \text{ para algum } \xi_x \text{ entre } a \text{ e } x$$

(Atenção: ξ_x depende de x, a.)

Não conhecemos ξ_x, nem esperaríamos conhecer, porque então poderíamos determinar $f(x)$ exatamente. Contudo, a expressão de Lagrange para o erro cometido permite *majorá-lo,* isto é, limitá-lo ou controlá-lo.

Demonstração extraordinária: Assumiremos $x > a$ e encontraremos $a < \xi < x$. Todo o procedimento pode ser repetido quando $x < a$, obtendo-se $x < \xi < a$. Você também deve verificar o caso $x = a$ em separado, quando $E_N(a) = 0$. Note também que, para este trabalho, x está fixado!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Considere

$$\varphi(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{K}{(N+1)!}(x-y)^{N+1}$$

onde $K \in \mathbb{R}$ deve ser escolhida de modo que $\varphi(a) = 0$ (basta substituir $y = a$ e resolver em K). Temos φ contínua e derivável porque f é $N+1$ vezes derivável. Também temos $\varphi(x) = 0$, já que $f(x)$ cancela com $\frac{f^{(0)}(x)}{0!}(x-x)^0$.

Porque φ é derivável e $\varphi(a) = \varphi(x)$, o TVM fornece $\xi \in]a, x[$ tal que $\frac{d\varphi}{dy}(\xi) = 0$. Por outro lado, derivando-se explicitamente quanto a y, calculamos

$$\begin{aligned}
\varphi'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\big[f^{(k+1)}(y)(x-y)^k + f^{(k)}(y)k(x-y)^{k-1}(-1)\big] - \\
&\qquad - \frac{K}{(N+1)!}(N+1)(x-y)^N(-1) = \\
&= \underbrace{-f'(y) - \sum_{k=1}^{N} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}}_{\text{cancelamentos}} + \frac{K}{N!}(x-y)^N = \\
&= -\frac{f^{(N+1)}(y)}{N!}(x-y)^N + \frac{K}{N!}(x-y)^N = \\
&= \frac{K - f^{(N+1)}(y)}{N!}(x-y)^N.
\end{aligned}$$

Então, de fato, $K = f^{(N+1)}(\xi)$ para que $\varphi'(\xi) = 0$.

Agora, notando que $E_N(x) - \frac{K}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} = \varphi(a) = 0$, obtemos a fórmula no slide. □

Exemplo

$f(x) = \cos x$ de classe C^∞ e $a = 0$.

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } k \text{ divisível por } 4 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } k \text{ div. } 4 \text{ resto } 1 \\ -\cos x & \text{se } k \text{ div. } 4 \text{ resto } 2 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } k \text{ div. } 4 \text{ resto } 3 \end{cases}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Em especial:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 4n \\ 0 & \text{se } k = 4n+1 \\ -1 & \text{se } k = 4n+2 \\ 0 & \text{se } k = 4n+3 \end{cases}$$

Sabemos que

$$E_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1} \text{ para } \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Mas $f^{(N+1)}$ é $\pm\operatorname{sen}$ ou $\pm\cos$, donde

$$|E_N(x)| = \left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right| \cdot \underbrace{|f^{(N+1)}(\xi)|}_{\text{máximo } 1} \leqslant \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \ (x \text{ constante}).$$

Então

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Mais: $f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ com $|E_4(x)| \leqslant \frac{|x|^5}{5!}$, donde $\cos 1 \approx 0{,}5417$ com erro no máximo $\pm 0{,}0084$.

O final do slide, apesar de curto, é a parte mais importante. Você pode pensar que essa aproximação é muito ruim comparada àquela que você facilmente obtém na calculadora. Porém, considere dois aspectos:

(1) É importante determinar uma limitação superior para o erro cometido, ou seja, ter controle sobre a aproximação.

(2) A calculadora, ou o programa de computador, executa procedimentos muito parecidos para produzir o resultado no visor. Porque a máquina trabalha mais rápido, pode obter uma aproximação melhor, mas agora você sabe de onde essa aproximação veio e quais problemas estão envolvidos com ela.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Com $g(x) = e^x$ de classe C^∞ e $a = 0$, sabendo que $2 < e < 3$, estime e com erro até $\pm 0{,}005$.

(Sugestão: $N = 5$.)

(Em geral, dado um erro, busque o primeiro grau que oferece erro menor.)

Exemplos faltosos

- $h(x) = \ln x$ definida em $]0, \infty[$, mas $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ só converge em $]0, 2]$.
- $w(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ tem $w^{(k)}(0) = 0$ para todo k, então $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Capítulo 7

Comportamento de Funções

7.1 Otimização

Nossas definições trabalham com uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$, sendo $D \subseteq \mathbb{R}$, e um ponto $a \in D$. A função f, que deveremos determinar nas situações-problema envolvendo otimização, é a que desejamos maximizar ou minimizar e é frequentemente chamada "função objetivo".

Máximos e mínimos

Quando $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in D$:

- a é um *ponto de máximo global (ou absoluto);*
- $f(a)$ é o *valor máximo global (ou absoluto).*

Quando $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in D$: mínimo *mutatis mutandis.*

Domínio é importante! Fora dele, f não está definida *ou* valores maiores e menores não interessam.

Calcular os pontos de máximo ou mínimo e os valores máximos ou mínimos de uma função são uma das preocupações fundamentais do Cálculo, porque, como veremos em exemplos, eles servem para maximizar um produto (seja lucro, produção industrial, sustentabilidade de uma asa de avião) ou minimizar um fator (seja custo, desperdício, resistência aerodinâmica, etc.)

Atente para a distinção vocabular: um *ponto do domínio* poderá ser "ponto de máximo ou mínimo", já sua *imagem* poderá ser "valor máximo ou mínimo".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Quando se restringe a alguma vizinhança de a: *extremo local (ou relativo).*

Discussão sobre localidade: compare picos do Jaraguá e do Everest.

Em termos formais, a é um *ponto de máximo local (ou relativo)* se existir vizinhança V de a de modo que $(\forall x \in V \cap D)\, f(x) \leqslant f(a)$ e, nesse caso, $f(a)$ é um *valor máximo local (ou relativo).* Analogamente, a condição de minimalidade local ou relativa escreve-se $(\exists V$ vizinh. de $a)(\forall x \in V \cap D)\, f(x) \geqslant f(a)$.

Os extremos locais oferecem informação importante sobre o comportamento da função, especialmente para a confecção de gráficos ou se nosso interesse reside em um subconjunto do domínio que contém o extremo local, mas não o global.

Nesse espírito, o pico do Jaraguá é muito mais significativo para a região da Grande São Paulo que o pico do Everest, embora este certamente seja muito mais alto. Assim, o Jaraguá domina toda essa região e é seu ponto de máxima altitude (se restringirmos o domínio a tal região) e, também, é um ponto de máximo local mesmo em termos planetários. Porém, o Everest é o ponto de máxima altitude global se tomarmos o domínio como todo o planeta. (Em ambos os casos, o monte Olimpo em Marte não é um ponto de interesse, porque está fora do domínio especificado.)

Doravamente, preocupamo-nos geralmente com D sendo um intervalo, ou uma união de uma família finita de intervalos todos fechados e limitados.Para qualquer outro domínio, será sempre melhor fazer todo o estudo e esboço do gráfico da função, como aprenderemos na próxima seção.

Procedimento de determinação

(1) Determinar *pontos críticos* de f:

- onde f' se anula;
- onde f' não existe.

Calcular f neles.

(2) Calcular f nas extremidades do domínio.

(3) Comparar esses valores.

Isso determina extremos globais (se f for contínua).

Preliminar©2015 Vinicius C. L.

O primeiro passo constitui um teorema de Fermat: extremos interiores ocorrem em pontos críticos da função. Isso significa que podemos restringir nossa atenção a esses pontos (ou seja, não escapará nenhum, exceto os do segundo passo), *mas nem todos os pontos críticos serão pontos de extremo!* Como já discutimos com o Teorema de Rolle, espera-se que os extremos ocorram onde as tangentes ao gráfico são horizontais ou (quando se violam as hipóteses do teorema) onde elas não existem, como para as funções $5-x^2$ e $|x-3|$.

Porém, alguns pontos críticos são, digamos, "críticos demais", caso do 0 para as funções x^5 (derivada $5x^4$, tangente horizontal, um ramo desce, outro sobe) e $\sqrt[3]{x}$ (derivada $1/3\sqrt[3]{x^2}$, tangente vertical, um ramo desce, outro sobe).

Uma prova formal do Teorema de Fermat é feita assim: Tomamos um máximo ou mínimo interior e assumimos que existe a derivada nesse ponto; devemos mostrar que, então, ela vale zero. Mas, nessas condições, podemos usar o mesmo argumento final da prova do Teorema de Rolle, comparando sinais de limites laterais.

O segundo passo alerta que as extremidades (a fronteira) do domínio também são importantes. No caso de um intervalo fechado $[a,b]$, essas extremidades são os pontos a e b. Em outros casos de domínio, como veremos ao estudar todo o gráfico de uma função, deveremos tomar os limites laterais (onde a extremidade for aberta) ou nos pontos infinitos (caso o domínio seja ilimitado). Atentar para a fronteira do domínio reflete apenas o fato de que alguns domínios são "caprichosos" ou mascaram alguma descontinuidade. (Portanto, é preciso cuidado quando somente alguns pontos entram na lista para terem seus valores comparados: se há um único ponto a considerar, uma comparação cega diria que ele é ponto tanto de máximo como de mínimo...)

Por exemplo, x^2-1 sobre $\mathbb{R}$ não tem máximo, mas tem mínimo no zero; a mesma função sobre $[-1,2]$ tem máximo global em 2, tem máximo local em -1 e tem mínimo global no zero; sobre $]2,3[$, não tem nem máximo nem mínimo! Já a função $1/x$ em $[-1,0[\,\cup\,]0,1]$ tem máximo local em -1 e mínimo local em 1 — note que o valor máximo local é *menor* que o valor mínimo local —, mas esses extremos não são globais; seu comportamento é mais complexo em vista da descontinuidade essencial no zero.

O terceiro passo pede simplesmente que se comparem os valores candidatos para sabermos qual deles (e onde) é o maior e o menor.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(4a) Verificar sinal de f'' *nos* pontos críticos:

no ponto, se	então é
$f'' > 0$	mínimo local (boca acima)
$f'' < 0$	máximo local (boca abaixo)
$f'' = 0$ ou não existe	possível inflexão: vá para (4b)

Isso determina extremos locais interiores (se f for C^2).
Nas extremidades: mesmas bocas, caracteres opostos.

Discutiremos em breve o que significa o gráfico de uma função ter "concavidade para cima ou para baixo", mas não há surpresas aqui: trata-se da mesma classificação que você já conhece para parábolas. De fato, vejamos como ambas as situações relacionam-se: No ponto a, vamos substituir $f(x)$ pela melhor aproximação de segundo grau $f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2$, cujo gráfico é uma parábola. Expandindo-se o polinômio, vemos que o coeficiente de x^2 é $f''(a)/2$ e, então, a concavidade da parábola depende de seu sinal; o gráfico de f deverá ter aproximadamente a mesma aparência ao redor de a. Note que não assumimos que a fosse crítico e, então, poderemos fazer a mesma classificação em qualquer ponto onde haja $f''(a)$; aqui, calculamos f'' nos pontos críticos somente porque é neles que estamos interessados para máximos e mínimos.

Também veremos o que é um "ponto de inflexão", onde a concavidade do gráfico muda de orientação. Porém, nem todo ponto crítico com $f'' = 0$ é ponto de inflexão: a função x^4 tem concavidade para cima, mas todas as derivadas são zero em 0. Como não é possível tirar alguma conclusão nessa situação, analisar o entorno do ponto crítico será essencial e o estudo a seguir deverá ser feito.

No caso das extremidades do intervalo, embora a orientação da concavidade do gráfico seja a mesma, o caráter de máximo ou mínimo local é invertido: por exemplo, se a concavidade é "para baixo", então o gráfico está todo abaixo do valor de um ponto crítico (que será ponto de máximo local), mas acima do valor de uma extremidade (que será ponto de mínimo local), justamente porque a boca está virada de cima para baixo.

Se (4a) *já produziu os resultados desejados, pode parar por aqui!* Discutiremos sua demonstração juntamente com a de (4b).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(4b) Verificar sinal de f' *ao redor* dos pontos críticos e das extremidades:

à esquerda	à direita	então é
$f' > 0$	$f' < 0$	máximo local
$f' < 0$	$f' > 0$	mínimo local
outras combinações		não é extremo

Isso determina extremos locais interiores (se f for derivável). (Complicado, talvez desnecessário.)

(Somente é preciso determinar os sinais de f' à esquerda e à direita *localmente,* isto é, ao redor do ponto crítico, em um pequeno intervalo para cada lado; não no domínio todo!)

Em algumas situações, determinar o sinal da derivada em intervalos pode ser complicado! Frequentemente, (4a) é mais fácil de usar que (4b) porque requer determinar o sinal de uma função em um único ponto por vez, não em todo um entorno. Porém, exigiu-se continuidade de f'': na falta disso, é preciso novamente checar o comportamento de seu sinal em toda uma vizinhança.

Demonstrar essa regra requer apenas aquele exercício sobre crescimento invocando o TVM. Se a função cresce antes do ponto crítico e decresce depois, então ela assume valor máximo nesse ponto, sendo análogo o caso para valor mínimo.

Quanto a demonstrar (4a), repare apenas que o sinal de f'' no ponto valerá também em um entorno dele (assumindo f'' contínua) e, portanto, indica crescimento ou decrescimento da própria função f' ali, assim como usamos f' para estudar o crescimento de f. Desse modo, no ponto crítico, f' deverá trocar de sinal e então a tabela em (4b) poderá ser usada. Por exemplo, suponha que $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$; suponha ainda f'' contínua. Então, ao redor de a, ainda temos $f'' > 0$, de modo que f' é crescente ao redor de a (já que f'' é a primeira derivada de f'). Como $f'(a) = 0$ e f' é crescente, é preciso que $f' < 0$ à esquerda de a e $f' > 0$ à direita de a. De acordo com (4b), vemos que a é um ponto de mínimo local.

Exemplo na lousa

Determine e classifique os pontos de extremo globais e locais de $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 7$ em $[-10, 10]$, com todo o procedimento proposto.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Para fazer (4b), lembre-se de como determinar o sinal de um polinômio: escreva-o como produto de monômios e multiplique, em cada intervalo, -1 para cada raiz à esquerda e 1 para cada raiz à direita.)

Solução: Máximo global em 10; mínimo global em -2; máximos locais em 10, 0 e -10 e mínimos locais em 1 e -2.

Procedimento básico de otimização

- Leia cuidadosamente e faça diagrama.
- Introduza notação (dê nome aos bois).
- Relacione as quantidades envolvidas.
- Traduza a quantidade pedida em termos de *apenas uma* outra, por substituição.
- Ache os extremos e classifique-os.
- Formule a conclusão com clareza.

Exemplos clássicos

Um rancheiro dispõe de material para 500 m de cerca e deseja cercar um pasto retangular adjacente a um rio reto. Não é preciso fechar ao longo da margem. Quais as dimensões do pasto com maior área que ele pode cercar?

(Diagrama na lousa.) Frente x e laterais y: temos $x+2y=500$. Área $A = xy = (500-2y)y = 500y - 2y^2$; derivada $500-4y$, ponto crítico $y_0 = 125$; 2ª derivada $-4 < 0$ indica máximo.

Dimensões: frente 250 m paralela ao rio e laterais 125 m.

Verificar a natureza do extremo (usando a segunda derivada) pode parecer irrelevante onde, intuitivamente, o extremo encontrado deve mesmo ser a resposta do problema. Já houve, porém um caso de avião que não voava porque, no projeto de suas asas, os engenheiros não constataram que o ponto crítico da resistência ao ar era um ponto de máximo, não de mínimo!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Qual é o ponto na reta $3x - y = 0$ mais próximo de $(2, 4)$?
Ponto arbitrário é $(x, 3x)$, distância é

$$d = [(x-2)^2 + (3x-4)^2]^{1/2}.$$

Mais simples minimizar d^2; derivada é

$$2(x-2) + 2(3x-4)3 = 20x - 28,$$

ponto crítico $x_0 = 1{,}4$; $2^{\underline{a}}$ derivada $20 > 0$ indica mínimo.
Resposta: ponto $(1{,}4; 4{,}2)$.

Observe que minimizar uma expressão é o mesmo que minimizar seu quadrado. Aqui, então, optamos por estudar d^2, que é muito mais simples de derivar que d. Se você tiver que estudar uma soma da forma $f + \sqrt{g}$, porém, não convirá adotar esse expediente.

Esteja atento, também, à forma como escreve as informações dadas. Um ponto da reta $y = 3x$ escreve-se tanto $(x, 3x)$ como $(y/3, y)$, mas um ponto da parábola $y^2 = 3x$ deverá ser escrito $(y^2/3, y)$, já que a forma $(x, \sqrt{3x})$ requer $x \geqslant 0$ e deixa de lado metade da parábola. (Você pode, porém, estudar cada metade em separado.)

Finalmente, como você adaptaria essa solução se o problema pedisse por um ponto no segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 3)$?[a]

Exercícios clássicos

Minimize o custo do material para fabricar uma lata cilíndrica de metal (com base e tampa) de volume $800\,\mathrm{cm}^3$. Quais as dimensões da lata?[b]

(Custo é proporcional à superfície.)

(Veremos esse problema novamente na pág. 360, Parte "Várias Variáveis", aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange.)

O serviço postal de um país impõe a seguinte limitação para despachar pacotes em formato paralelepípedo retângulo: a maior dimensão e a *cintura* somadas não podem superar $250\,\mathrm{cm}$.Qual é o maior volume de um pacote com secção quadrada que podemos despachar?[c]

(Há duas possibilidades para a maior dimensão!)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Um jipe encontra-se a 80 km oeste de uma estrada norte-sul e deve ir a um encontro na estrada a 300 km norte. Sua velocidade no asfalto é 80 km/h e no sertão é 50 km/h. Determine em que direção à estrada o jipe deve partir (para um percurso reto até a estrada e depois, por ela, até o ponto de encontro) para minimizar o tempo de viagem.[d]

(Ou seja, determine a posição de chegada na estrada em relação ao paralelo inicial.)

Com o mesmo *know-how* desse exercício e um diagrama mais elaborado, você poderá deduzir a Lei de Snell: Fermat observou que a trajetória da luz entre dois pontos minimiza o tempo de viagem entre eles. Suponha que esses pontos estão em dois meios 1 e 2. No diagrama, assuma que a fronteira entre os meios é reta. Assuma que no meio i a velocidade da luz é v_i. Onde a trajetória ótima da luz incide na fronteira, de cada lado, chame α_i ao ângulo da trajetória com a normal à fronteira. Mostre que $(\operatorname{sen}\alpha_1)/(\operatorname{sen}\alpha_2) = v_1/v_2$. (Seu diagrama deverá destacar alguns triângulos auxiliares, para cujos lados você deverá dar nomes!)

Muitos, muitos mais problemas podem ser formulados e resolvidos assim. Procure-os!

Atenção: Em uma aplicação real, alguma variável poderá ser limitada por especificações técnicas ou todo um material deverá ser utilizado, sem sobras. Em tais casos, a função a ser maximizada ou minimizada está definida em um domínio limitado e pouco intuitivo. Tenha certeza de comparar também seu valor nas extremidades desse domínio.

Mais geralmente, podemos lidar com domínios ilimitados ou perfurados, ou ainda com funções descontínuas ou não-deriváveis. Entender globalmente tais funções é a melhor estratégia, para não "deixar escapar nada", o que requer conhecer seu grafico completo. É o que faremos na próxima seção.

7.2 Gráficos

Novamente tratamos de uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$, com domínio $D \subseteq \mathbb{R}$. Há um procedimento básico com vários passos. Após enunciar cada grupo deles, damos as devidas explicações.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Determine e marque os pontos de interesse

- Extremidades e "furos" do domínio.
- Interceptos: $f(0)$ e raízes de f.
- Descontinuidades de f.

Estude os sinais de f.

Já observamos que o conjunto D pode não ser o domínio mais natural ou óbvio da expressão que define f. Portanto, convém marcá-lo explicitamente no eixo das abscissas para visualizar os pontos de interesse nos passos seguintes. Serão especialmente importantes os pontos de acumulação de D que não pertencem a D, ou seja, os pontos de fronteira onde f não está definida. Nos demais pontos de fronteira, aqueles em D, podemos calcular f imediatamente.

Naturalmente, se $0 \in D$, podemos calcular $f(0)$: esse é o ponto do eixo das ordenadas cruzado pelo gráfico de f. Também é natural querer calcular as raízes da equação $f(x) = 0$, onde o gráfico de f cruza o eixo das abscissas, mas é claro que isso pode ser complicado. Finalmente, determinamos se f é positiva ou negativa em cada intervalo entre suas raízes.

Quando f é definida por pedaços (vários casos com expressões diferentes), devemos verificar se f é contínua ou não em cada ponto de fronteira, tomando os limites laterais e marcando-os (com bolas abertas) junto com o valor da função (bola fechada). Também quando uma expressão que define f envolve denominadores, raízes ou logaritmos, procuramos determinar onde essa expressão fica descontínua.

Determine simetrias

Em cada parte do domínio, a função

- é par, ímpar ou periódica?
- é translação vertical ou horizontal de função mais simples?
- é dilatação vertical ou horizontal de função mais simples?
- é composição de funções conhecidas?

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Calcule limites laterais

Nas extremidades, "furos" e pts. descontinuidade, calcule e marque cada limite lateral.

Possibilidades:

- bola aberta/fechada;
- oscilação;
- assíntota vertical.

Calcule, em cada ponto identificado em D, os limites laterais de f, pelos lados onde D acumula-se. Se um desses limites for número real, marcamos essa ordenada (com bola aberta) para depois "ligarmos os pontos". Se algum for infinito, obtivemos uma *assíntota vertical* do gráfico, que deve ser marcada com tracejado. Se um limite não existir nem for infinito, esteja atento à oscilação local.

Assim, o procedimento foi o mesmo para pontos de acumulação não pertencentes a D e pontos de descontinuidade da função, sendo que nestes a função está definida e aparece uma bola fechada. Note bem que os limites laterais podem ter, *cada um e independentemente,* qualquer dos três comportamentos indicados.

Determine assíntotas

Calcule limites nos infinitos, que indicam oscilação ou assíntotas horizontais ou inclinadas.

Calcule:

- $M = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;
- $B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Mx)$.

Se são reais, a equação da assíntota em ∞ é $y = Mx + B$.

Pode não haver assíntota (inexistir M).

Faça o mesmo em $-\infty$.

Em cada direção à qual D for ilimitado, podemos calcular o limite de f no infinito correspondente. Se o limite é real, obtivemos a *assíntota horizontal* do gráfico naquela direção e que devemos também marcar tracejada: o gráfico pode aproximar-se cada vez mais, por um lado, dessa reta, ou oscilar em torno dela cada vez mais "apertado".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se o limite não existe ou é infinito, também obtemos informações valiosas, indicando se é o caso de uma *assíntota inclinada,* em que procedemos ao cálculo de M, B como no slide. O caso específico das assíntotas horizontais é contemplado, aqui, com $M = 0$.

As definições de M, B podem ser motivadas assim: Desejamos $f(x) \approx Mx + B$, em que devemos determinar os parâmetros reais M e B. Dividindo essa relação toda por x e, depois, fazendo $x \to \infty$, obtemos

$$\frac{f(x)}{x} \approx M + \frac{\overset{0}{\cancel{B}}}{\cancel{x}}.$$

Desse modo, eliminamos B da relação e determinamos M. Dispondo desse número, isolamos o outro: $B \approx f(x) - Mx$.

Seja a assíntota horizontal ou inclinada, o gráfico da função f deve aproximar-se cada vez mais dessa reta, mas pode muito bem *oscilar* em torno dela ou afastar-se um pouco, periodicamente. Não se preocupe com isso neste curso, porque o estudo de f' e f'' já dá cabo dessas possibilidades. Mas, caso você queira investigar essa relação com mais detalhes, basta considerar $f(x)-(Mx+B)$: suas raízes são os pontos em que o gráfico de f cruza a reta; seu sinal indica a posição relativa entre ambos; sua derivada mede quão rapidamente o gráfico aproxima-se ou afasta-se da assíntota, dependendo dessa posição relativa.

Também é possível que não hajam assíntotas, quando M ou B não existe. Por exemplo, x^3 não tem assíntotas; e^x só tem assíntota em $-\infty$; $\ln x$ só tem assíntota em 0. Para $\ln x$ quando $x \to \infty$, temos $M = 0$ (por l'Hospital) e $B = \infty$, o que indica que $\ln x$ explode, mas sempre abaixo de qualquer função linear.

Estude os sinais das derivadas

- Marque raízes e pts. inexistência das derivadas.
- Calcule f ou limites laterais em cada um e marque.
- Sinais 1ª derivada: crescimento, extremos locais, "bicos" e tangentes verticais.
- Sinais 2ª derivada: concavidades e inflexões.

É claro que queremos marcar no gráfico de f os seus valores extremos!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Calcule a função derivada f' e utilize o passo (4b) acima para determinar onde f é crescente ou decrescente e, de quebra, onde estão os extremos locais e onde a derivada não é determinada. Trata-se, é claro, de estudar o sinal de f': positivo, negativo, zero ou inexistente, em todo o domínio. Você deve marcar os pontos críticos de f no domínio e determinar o sinal de f' entre eles; onde f' é negativa, marque $\searrow$ (f é decrescente); onde f' é positiva, marque $\nearrow$ (f é crescente).

Calcule também f'' e utilize (4a), mas agora com mais detalhes: Seja em ponto crítico ou não, onde $f'' > 0$ o gráfico de f é *convexo* e onde $f'' < 0$ o gráfico é *côncavo.* Nos outros pontos, onde $f'' = 0$ ou não existe, pode (não necessariamente) ocorrer *inflexão,* isto é, a curvatura mudar de orientação, como o gráfico de $\operatorname{sen} x$ em π. Assim, siga o mesmo procedimento: determine as raízes de f'' e onde ela não se define; determine o sinal de f'' entre eles; marque $\smile$ onde $f'' > 0$ e $\frown$ onde $f'' < 0$; utilize essas informações em conjunção com aquelas obtidas de f' para determinar se $\searrow$ ou $\nearrow$ devem ser abauladas para cima ou para baixo.

Note que f'' é a taxa de variação de f', assim como a aceleração é a taxa de variação da própria velocidade. Desse modo, o mesmo raciocínio colegial de Física aplica-se aqui: o gráfico de f pode subir mais rapidamente ou mais lentamente, ou descer mais rapidamente ou mais lentamente.

Deixamos a seu encargo explorar a equivalência desse estudo do sinal de f'' com outras definições de *função convexa:*

(a) se a secante entre dois pontos do gráfico passa sempre acima do gráfico;

(b) se a tangente ao gráfico em um ponto passa sempre abaixo do gráfico.

Esta condição significa, em a e tomando a melhor aproximação linear $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, que $L(x) \leqslant f(x)$. Mas $L(a) = f(a)$ e $L'(x) = f'(a) < f'(x)$ se $f'' > 0$, de modo que L parte do mesmo valor de f, embora crescendo menos, donde $L \leqslant f$.

Por analogia, o mesmo pode ser feito quanto a *funções côncavas.*

Exemplo na lousa

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

com domínio máximo

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Esboce os gráficos destas funções (com domínios máximos):

- $g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$;
- $r(t) = 2\sqrt{10-t} - \sqrt{t-1}$;
- $s(t) = t^2/\sqrt{t+1}$;
- $\theta(y) = \mathrm{tg}^{-1}\, y^2$.

Exercício

Esboce o gráfico de $h(x) = xe^{-x}$ com estudo completo, depois:

- Desenhe-o dentro da escala $[-1, 5] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- Desenhe-o dentro da escala $[-10, 10] \times [-10, 10]$.
- Verifique, se possível, o gráfico "cru" apresentado por diversas calculadoras e softwares.
- Disserte sobre os cuidados necessários com essas máquinas e o que se deve conferir no manual (eixos automáticos ou constantes e seus valores).

(A primeira escala apresentada, por exemplo, codifica $-1 \leqslant x \leqslant 5$ e $-\frac{1}{2} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}$, ou seja, você deverá utilizar esse retângulo cartesiano como "moldura". Sua calculadora pode apresentar gráficos em uma escala pré-determinada pelo fabricante; o exercício acima alerta para o cuidado necessário e a utilidade da tecla "zoom".)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 8

Primitivização

Dada uma expressão, sabemos derivá-la seguindo regras atômicas (derivadas das funções elementares ou "tijolinhos") e operacionais (derivadas das combinações desses "tijolinhos"). Agora, embora haja algumas regras e métodos para o cálculo de primitivas, não existe algoritmo ou "receita de bolo"!

Portanto, assim como para limites, aprende-se mais pelo estudo de exemplos. Apresentamos, para as principais técnicas (chamadas de "integração por substituição" e "por partes"), suas origens formais, mas as fórmulas correspondentes são abstrusas.

Também destacamos que métodos diferentes são possíveis para um mesmo integrando, levando a expressões que podem ser rearranjadas umas nas outras ou, mesmo, fundamentalmente distintas, seja em aspecto ou somando-se um termo constante.

8.1 O que são primitivas

Dada f, queremos encontrar F com $F' = f$.
Motivações:

- curiosidade intelectual;
- compreender processo de derivação;
- Teorema Fundamental do Cálculo (futuramente).

Sim, é verdade: um bom motivo para o estudo de primitivas é o TFC. Infelizmente, se fôssemos primeiro falar de integração definida e desse teorema,

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

teríamos um problema sério: antes de passar às aplicações, precisaríamos aprender a calcular primitivas. Então, é melhor já estudá-las de antemão!

Também, como todo problema de inversão de um processo, pode ajudar a compreender o próprio processo direto: isso se tornará importante para determinar soluções de equações diferenciais. De qualquer modo, o problema de primitivização é interessante *per se,* em termos científicos, especialmente porque não admite um algoritmo ou "receita" a ser seguida passo a passo.

Por causa do TFC, mesmo símbolo $\int$ é usado para primitivas e integrais definidas:

$$F = \int f(x)\,dx$$

Sinônimos para F: anti-derivada, primitiva, integral (indefinida).

O sinal de integração $\int$ é, provavelmente, um dos que mais se utilizará na academia, se não na carreira. Ele foi criado por Leibniz para representar uma "letra S alongada". Em diferentes textos ou fontes, esse sinal é desenhado um pouco diferente, de modo que convém acostumar-se a reconhecê-lo. Aqui, após alguma pesquisa, preferimos simplesmente utilizar a representação usual da fonte em que vários documentos e relatórios científicos são compartilhados.

Por outro lado, *é importante que todos entendam* seu sinal de integração manuscrito; busque sempre fazer o "S alongado", assim: $\int$. Também marque claramente os dois ganchos.

O fator dx indica a variável de integração ou primitivização (como na notação $\frac{d}{dx}$ para derivação). *Nunca o esqueça!* Há um pequeno abuso de notação quando se escreve $F(x) = \int f(x)\,dx$. Quando estudarmos integração definida, notaremos que a variável x (com respeito à qual se integra) não deverá constar nos extremos da integral, nem no resultado final. (É a mesma situação dos limites.) Contudo, a primitiva F é também uma função e, para explicitá-la, usa-se a mesma variável x. (É o mesmo abuso das derivadas: escrevemos $(x^3 + 5x)' = 3x^2 + 5$.) Porém, o nome da variável não sendo relevante, importará apenas que não conflite com outras variáveis em uso, como veremos com o uso de primitivas em integração definida, de modo que a variável de integração é uma "variável muda".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Constante de integração

Derivada de constante é zero: se F é primitiva de f então também é qualquer $F + C$, com $C \in \mathbb{R}$.

Sempre some a constante de integração: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Em intervalo, isso dá *todas* as primitivas possíveis.

Exemplo:

$$g''(x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow g'(x) = \cos x + A \Rightarrow g(x) = \operatorname{sen} x + Ax + B$$

Ao usar primitivas em conjunto com o Teorema Fundamental do Cálculo, você tenderá a ignorar a constante de integração porque ela será somada e subtraída, então sequer precisaremos escrevê-la. Contudo, ela é importantíssima em outras situações.

No slide, observamos que a constante de integração indica uma *família* de primitivas da mesma função original, todas translações verticais umas das outras, lembrando-nos de que várias funções podem ter a mesma derivada. Já sabemos que, em um intervalo (subconjunto conexo da reta), a recíproca é verdade: se duas funções têm a mesma derivada, então diferem apenas por uma constante, e então essa família de primitivas contém todas elas.

Quando o processo de integração é repetido, aparecem mais constantes e as anteriores tornam-se coeficientes de polinômios, como mostra o exemplo do slide. É necessário, portanto, indicar essas constantes, porque as funções que elas determinam passam a ser notoriamente diferentes. Tal necessidade será sublinhada no estudo de equações diferenciais, porque as constantes terão interpretação dada pelos "problemas de valor inicial".

Por exemplo, no movimento retilíneo uniformemente variado, seja γ a aceleração constante. Então, com s, V a posição e a velocidade do ponto, respectivamente, sabemos que $\dot{s} = V$ e $\dot{V} = \gamma$. Veremos regras de primitivização que nos dirão, assim, que $V(t) = \gamma t + C$ e $s(t) = \gamma t^2/2 + Ct + D$. Ora, substituindo $t = 0$, vemos que $C = V(0)$ e $D = s(0)$, como conhecemos no Ensino Médio: as constantes de integração são o que nos permite incluir as condições iniciais do movimento em sua expressão.

8.2 Inversão das regras de derivação

Esta seção trata dos procedimentos de primitivização que são conseqüência imediata das regras de derivação simbólica, porque tratam de "desfazê-las". Na próxima seção, estudaremos algumas técnicas que se aplicam a integrandos ou situações específicos.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Tabelas de primitivas

Decore! ($r \neq -1$ e $0 < a \neq 1$)

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	C
1	$x + C$
x^r	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\log_a \lvert x\rvert$	$x \log_a \lvert x\rvert - \dfrac{x}{\ln a} + C$

Em particular, temos $\int e^x\,dx = e^x + C$ e $\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x + C$; as mesmas primitivas são válidas para logaritmos sem módulo, que assumem $x > 0$.

Como justificar essa tabela e as que se seguirão? Basta apenas derivar o lado direito de cada linha e verificar que se obtém o lado direito. Faça-o, como exercício! Deduzir as tabelas é outra história: como se obteve a primitiva, inicialmente? Algumas são um tanto óbvias, como para x^r, outras poderão ser resolvidas com as técnicas que aprenderemos, outras ainda com um pouco de "tentativa e erro".

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x$	$\ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert + C$
$\sec x$	$\ln\lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$
$\csc x$	$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\cot x + C$

A tabela a seguir é demais para memorização, mas apresentamo-la para

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

podermos enunciar exercícios diversificados e também praticar o uso de "primitivas tabeladas".

Para praticarmos:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x+C=-\arccos x+C_1$
$\sqrt{x^2\pm 1}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm 1}\pm\frac{1}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm 1}\rvert+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm 1}\rvert+C$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arctg} x+C=-\operatorname{cot}^{-1} x+C_1$
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+C$

As duas primeiras funções ocorrem mais comumente; a primeira é especialmente importante porque seu gráfico é a semicircunferência superior centrada na origem e com raio 1 ou, simplesmente, "arco de raio 1".

Não há qualquer vantagem em tentar decorar além disso, ou mesmo tudo isso. Importante é observar que funções muito parecidas terão primitivas muito diferentes e, em geral, com expressões bastante complicadas. Desse modo, é melhor integrar caso a caso.

Para isso, você conta com extensas tabelas de integração em livros e recursos computacionais. Mas raramente a expressão que se deseja integrar aparece literalmente na tabela e, portanto, é preciso prática em manipular primitivas. Vamos começar a fazê-lo agora: lembre-se de praticar bastante, procurando mais exercícios! (Uma boa pedida é a coletânea de Demidovitch!)

Nos próximos exemplos e exercícios, veremos repetidamente como calcular as partes difíceis das tabelas acima, usando as partes fáceis, e como usá-las para as ainda mais difíceis. É por isso que listamos tantas primitivas e, nos exercícios, listaremos mais.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Linearidade

$$\int (c_1 f_1 \pm \ldots \pm c_k f_k \pm c)\, dx = c_1 \int f_1\, dx \pm \ldots \pm c_k \int f_k\, dx \pm cx + C$$

Exemplo:

$$\int (2x^3 - 5\cos x + 3\ln x)\, dx = 2\tfrac{x^4}{4} - 5\operatorname{sen} x + 3(x\ln x - x) + C$$

Não existem regras para produtos e quocientes!

Exercício

Integre, com uso das tabelas:

- $(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$.[a]
- $\dfrac{1}{1-x^2}$.[b]
- $\dfrac{6x^3-3x+1}{3x^2}$.[c]
- $\operatorname{tg}^2 x$.[d]

Para o próximo slide, você deve ter em mente os mesmos princípios de substituição já utilizados em limites e derivadas. Por exemplo, sabemos que se $x \to 1$ então $3x-3 \to 0$ e, portanto, $\frac{\operatorname{sen}(3x-3)}{3x-3} \to 1$. Para derivar $\cos(x^2-x)\ln(x^2-x)$, a Regra da Cadeia nos diz para derivar $\cos y \ln y$, substituir $y = x^2 - x$ e então multiplicar por $y' = 2x - 1$. Em ambas as situações, tratamos uma expressão como um "bloco" ou "caixa preta" para facilitar nosso cálculo; faremos o mesmo para primitivização:

Passagem para dentro da diferencial

Pela Regra da Cadeia:

$$\int \big[F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\big]\, dx = \int \big[F\big(g(x)\big)\big]'\, dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Antes, $\frac{dg}{dx} = g'$. Agora, $g'(x)\, dx = d\big(g(x)\big)$.
Releitura com $F' = f$ ou $\int f\, dx = F$:

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = \int f\big(g(x)\big)\, d\big(g(x)\big) = F\big(g(x)\big) + C$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Essa técnica será aperfeiçoada como "integração por substituição", mas convém entendê-la (como uma forma abreviada) para uso intensivo na "integração por partes".

Simplesmente observamos as regras de derivação para "empacotar" partes do integrando na diferencial $d(g(x))$. Escrevendo, por exemplo, $y = g(x)$, o que devemos calcular agora é $\int F'(y)\,dy$; uma primitiva é $F(y)$, bastando substituir $g(x)$ para obter a primitiva desejada.

Exemplos

- $\int (x+5)^2\,dx = \int (x+5)^2\,d(x+5) = \dfrac{(x+5)^3}{3} + C.$
- $\int \cos 4x\,dx = \int \cos 4x \frac{d(4x)}{4} = \frac{1}{4}\int \cos(4x)\,d(4x) = \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + C.$
- $\int x^2 \cos x^3\,dx = \int \cos(x^3)\frac{d(x^3)}{3} = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{3} + C.$
- $$\int \frac{x^2\,dx}{(7x^3-54)^{400}} = $$
$$= \int (7x^3-54)^{-400}\frac{d(7x^3-54)}{21} = \frac{(7x^3-54)^{-399}}{21\cdot(-399)} + C.$$

É claro que o integrando deverá ajustar-se perfeitamente à Regra da Cadeia, caso contrário, deveremos utilizar outra abordagem. Por exemplo, $\int x\cos x^3\,dx$ não dá certo.

Caso as transformações pareçam complicadas, pode-se recorrer a símbolos auxiliares: no penúltimo exemplo, pondo $u = x^3$, temos $u' = 3x^2$ ou simplesmente $du = 3x^2\,dx$, de modo que $x^2\cos x^3\,dx = \frac{1}{3}\cos u\,du$ e é mais fácil integrar esta expressão; a primitiva é $\frac{1}{3}\operatorname{sen} u + C$, em que devemos substituir $u = x^3$. É o que faremos na "integração por substituição".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Integre:

- $\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$.[a]
- $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.[b]
- xe^{-x^2}.[c]
- $\dfrac{e^x}{e^x-1}$.[d]
- $\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$.[e]

Exercício

Integre, sendo $k \in \mathbb{R}$:

- $x\sqrt{x^2+k}$.[a]
- $x\sqrt{k-x^2}$.[b]
- $\dfrac{x}{x^2+k}$.[c]
- $\dfrac{x}{k-x^2}$.[d]
- $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+k}}$.[e]
- $\dfrac{x}{\sqrt{k-x^2}}$.[f]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Integre, usando as tabelas e assumindo $a > 0$:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$;[g] $\quad \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$;[h]
- $\sqrt{x^2 + a^2}$;[i] $\quad \sqrt{x^2 - a^2}$;[j]
- $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$;[k] $\quad \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$;[l]
- $\frac{1}{x^2+a^2}$;[m] $\quad \frac{1}{x^2-a^2}$;[n] $\quad \frac{1}{a^2-x^2}$;[o]

A primeira função é o "arco de raio a", generalizada a partir do "arco de raio 1" (pág. 203) e também de aplicação muito freqüente. Com uso da tabela, temos explicitamente:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a\sqrt{1 - \left(\tfrac{x}{a}\right)^2} \cdot a\, d\left(\tfrac{x}{a}\right) = \\ &= a^2\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)}{2}\sqrt{1 - \left(\tfrac{x}{a}\right)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\tfrac{x}{a}\right) + C_1\right] = \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

Convidamos a verificar esse resultado por derivação.

Exercício

Verifique, derivando, as primitivas tabuladas para sec e csc e deduza como essas primitivas podem ser obtidas.[a]

Integração por substituição

Pondo $x = x(t)$:

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(x(t)\big)\, \dot{x}(t)\, dt$$

com intuito de $f\big(x(t)\big) \cdot \dot{x}(t)$ ficar simples.

Esta técnica também é chamada de "integração por mudança de variável". Na prática, é apenas um desenvolvimento ou elaboração do que já fizemos ao "passar para dentro da diferencial".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Antes de efetivamente proceder à primitivização, devemos verificar que a substituição de uma variável por outra seja completa, assim como fizemos no cálculo de limites. Isso inclui cuidado com a diferencial, cuja expressão pode vir a ser alterada.

Em geral, buscamos a subexpressão mais complexa do integrando para dar-lhe novo nome. Duas formas ocorrem mais geralmente: substituir a variável x por uma expressão $x(t)$, como no slide acima, ou substituir uma expressão em x por uma única variável $u = u(x)$, de modo que o slide aplique-se a u^{-1}. Em ambos os casos, encontrar a expressão adequada requer prática e é artesanal.

Exemplos

- $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$: ponha $t = \sqrt{x+1}$ e $x = t^2 - 1$, donde $dx = 2t\,dt$. Temos:

$$\int \frac{(t^2-1)2t\,dt}{t} = \tfrac{2}{3}t^3 - 2t + C = \tfrac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - 2\sqrt{x+1} + C.$$

- $\int \dfrac{dx}{x^2-1}$: ponha $x = \operatorname{sen} t$, donde $dx = \cos t\,dt$. Temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos t\,dt}{\operatorname{sen}^2 t - 1} &= \int \frac{\cos t\,dt}{-\cos^2 t} = \\
&= -\int \frac{dt}{\cos t} = -\ln|\operatorname{tg} t + \sec t| + C = \\
&= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|^{-1} + C = \qquad \text{(triângulo na lousa)} \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right| + C = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C.
\end{aligned}$$

Quando aparece a expressão $a^2 - x^2$, talvez como radiciando, pode ser interessante fazer a substituição $x = a\operatorname{sen} t$. Desse modo, $a^2 - a^2\operatorname{sen}^2 t = a^2\cos^2 t$, talvez simplificando a expressão. Por exemplo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2 t}} = \int 1\,dt = t + C = \operatorname{arcsen}\tfrac{x}{a} + C.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Integre:

- $x\sqrt{x-1}$.[a]
- $\dfrac{x}{1+x^4}$.[b]
- $x(2x+5)^{500}$.[c]
- $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.[d]

- $(x^2-9)^{-1}$.[a]
- $(x^2+1)^{-1}$.[b]
- $(x^2+1)^{-1/2}$.[c]
- $(x^2-1)^{-1/2}$.[d]

Integração por partes

Pela regra do produto:

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx = \int \big[f(x)g(x)\big]'\,dx = f(x)g(x) + C$$

Então:

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)\,(+C)$$

Exemplos

- $\int \ln x\,dx = (\ln x)x - \int x\,d(\ln x) =$

$$= x\ln x - \int x\,\tfrac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

- $\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x\,d(x^2)$ fica ruim; faça

$$\int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A prática ensina que geralmente se passam, para dentro da diferencial, fatores exponenciais ou trigonométricos.

- $\int x^2 e^{-x}\,dx = \int x^2\,d(-e^{-x}) = x^2(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) d(x^2) =$

$$= -x^2e^{-x} + \int e^{-x} 2x\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int x\,d(-e^{-x}) =$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\big[x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx\big] =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C =$$
$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

(Ocorreu *redução de grau* do integrando; foi necessário "partes" duas vezes.)

- $\int e^{2x}\cos 5x\,dx = \int \cos 5x\,\dfrac{d(e^{2x})}{2} =$

$= \frac{1}{2}\big(e^{2x}\cos 5x - \int e^{2x}\,d\cos 5x\big) =$ (parênteses porque fator multiplica tudo!)
$= \frac{1}{2}\big(e^{2x}\cos 5x + 5\int e^{2x}\operatorname{sen} 5x\,dx\big) =$ (aparece integrando similar)
$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 5x + \frac{5}{2}\int \operatorname{sen} 5x\,\frac{de^{2x}}{2}) =$
$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 5x + \frac{5}{4}\big(e^{2x}\operatorname{sen} 5x - \int e^{2x}\,d\operatorname{sen} 5x\big) =$
$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 5x + \frac{5}{4}e^{2x}\operatorname{sen} 5x - \frac{25}{4}\int e^{2x}\cos 5x\,dx\big)$ (aparece integrando original).

Isolando, obtemos

$$\int e^{2x}\cos 5x\,dx = \tfrac{2}{29}e^{2x}\cos 5x + \tfrac{5}{29}e^{2x}\operatorname{sen} 5x + C.$$

(Ocorreu *repetição do integrando;* foi necessário "partes" duas vezes.)

Nesses exemplos, utilizamos a mesma técnica de integração por partes *duas vezes.* Isso é muito comum e pode ser destacado em um cálculo de primitiva que já conhecemos, para ilustrar que pode ser útil dar um nome provisório à primitiva: Chame $\int x^r\,dx = F$. Então

$$F = x^r x - \int x\,d(x^r) = x^{r+1} - \int x\,rx^{r-1}\,dx =$$
$$= x^{r+1} - r\int x^r\,dx = x^{r+1} - rF + C_1.$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Isole F e absorva o fator constante:

$$F \cdot (r+1) = x^{r+1} + C_1 \Rightarrow F = \tfrac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

- $\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \int x\, d(\cos^{-1} x) =$

$$\begin{aligned} &= x\cos^{-1} x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \\ &= x\cos^{-1} x - \tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\, d(1-x^2) = \\ &= x\cos^{-1} x - \tfrac{1}{2}\cdot \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C = \\ &= x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Nem sempre integração por partes (ou a escolha óbvia dessas "partes") pode ser uma boa idéia, como você pode experimentar com $(1-x^2)^{-1/2}$.

Também pode ser necessário mesclar as técnicas de integração, por partes e por substituição, uma durante o uso de outra.

Exercício

Integre:

- $x/\operatorname{sen}^2 x$.[a]
- $x \ln x$.[b]
- $(\ln x)^2$.[c]
- $e^x \operatorname{sen} 3x$.[d]
- $\operatorname{arcsen} x$.[e]

- $\operatorname{arctg} x$.[f]
- $\sqrt{1-x^2}$.[g]
- $\sqrt{x^2+1}$.[h]
- $\sqrt{x^2-1}$.[i]
- $x \operatorname{arcsen} x$.[j]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Das funções no exercício acima, $\sqrt{1-x^2}$ é o "arco de raio 1". Temos

$$\begin{aligned}\int (1-x^2)^{1/2}\,dx &= (1-x^2)^{1/2}x - \int x\,d[(1-x^2)^{1/2}] = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int x\,[\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)]\,dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int (-x^2)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int [(1-x^2)-1](1-x^2)^{-1/2}\,dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int (1-x^2)^{1/2}\,dx + \int (1-x^2)^{-1/2}\,dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int (1-x^2)^{1/2}\,dx + \operatorname{sen}^{-1} x,\end{aligned}$$

então

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C_1.$$

Pelo mesmo método, podemos integrar $\sqrt{x^2+1}$ e $\sqrt{x^2-1}$ como pedido no exercício; note que transformamos o fator $(-x^2)$ em $(1-x^2)-1$, que contém a mesma expressão do fator $(1-x^2)^{-1/2}$ para que seja simplificada distribuindo-se o produto.

Outro modo de integrar o arco é pela substituição $x = \operatorname{sen} t$ (ou, em geral, $x = a\operatorname{sen} t$ para um raio a), restando integrar $\cos^2 t$. Veremos na próxima seção como trabalhar com combinações trigonométricas variadas, neste caso fazendo $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$: experimente!

8.3 Integrandos com formas específicas

Aqui, exploramos em maior detalhe como integrar funções racionais, funções raízes e combinações trigonométricas. Os exemplos merecem ser estudados muito calmamente, porque há várias operações envolvidas em cada passagem.

Funções racionais

Calcular $\int \frac{F(x)}{G(x)}\,dx$ para polinômios F, G:

- Faça divisão euclideana: $F(x) = G(x)Q(x) + R(x)$ com $R = 0$ ou grau $R <$ grau G.
- Separe:
$$\int \frac{F(x)}{G(x)}\,dx = \underbrace{\int Q(x)\,dx}_{\text{fácil!}} + \int \frac{R(x)}{G(x)}\,dx$$
- Fatore G: estudaremos alguns casos.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Note, antes de mais nada, que se G é um monômio então podemos dividi-lo em cada termo de F, obtendo potências inteiras da variável e integrando facilmente:

$$\int \frac{3x^3 - 5x + 2}{6x^2}\,dx = \int \left(\frac{x}{2} - \frac{5x^{-1}}{6} + \frac{x^{-2}}{3}\right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{5}{6}\ln|x| - \frac{x^{-1}}{3} + C.$$

Para o estudo geral, usaremos o seguinte exemplo:

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{2x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 7x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} &= \\ = 2x^2 + 5 + \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} &= \\ = 2x^2 + 5 + \frac{2x^2 + 2x + 3}{x(x-1)^2}&\end{aligned}$$

(*Continua...*)

Caso de denominador totalmente redutível

$$G(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{k_i}$$

Existem constantes A_{ij} tais que

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}.$$

Para determiná-las, multiplique ambos os lados por $G(x)$ e iguale coeficientes ou substitua os a_i.

Integre usando ln ou potência.

Ou seja, trabalhamos com um numerador de grau menor que o do denominador e este, por sua vez, pode ser totalmente fatorado com raízes reais, lembrando que elas podem ter diversas multiplicidades. Nesse caso, para uma raiz a com multiplicidade k, escreva as frações

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^2},\ \ldots,\ \frac{K}{(x-a)^k},$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

para cada potência de 1 até a multiplicidade da raiz; use parâmetros (letras constantes) diferentes para cada raiz e some essas frações para todas as raízes. No total, temos um número de parâmetros igual ao grau do denominador e devemos determinar os valores desses parâmetros.

No exemplo,

$$\frac{2x^2+2x+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Então

$$\begin{aligned} 2x^2+2x+3 &= A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = \\ &= (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + A, \end{aligned}$$

donde $A=3$, $B=-1$, $C=7$.

Para determinar os parâmetros, priemiro formamos a equação da fração que temos igual à forma que pretendemos e multiplicamo-la toda pelo denominador, obtendo uma equação entre polinômios.

Agora, expandimos o polinômio (segunda linha) para comparar os coeficientes e resolver o sistema resultante, cujo número de equações também é igual ao grau do denominador. No exemplo, obtemos as três equações $A+B=2$, $C-2A-2B=2$ e $A=3$.

Em casos simples, também podemos substituir as raízes do denominador e, se necessário, outros valores adequados, na primeira forma do polinômio (primeira linha), para obter facilmente diversas igualdades e isolar os parâmetros. (Isso funciona especialmente bem quando todas as raízes são simples, bastando-as para obter todas as igualdades.) No exemplo, $x=0$ implica $3=A$ e $x=1$ implica $7=C$; colocando ainda $x=2$ obtemos $15=A+B\cdot 2+C\cdot 2$, donde $B=-1$.

Conclusão:

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x^5-4x^4+7x^3-8x^2+7x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx = \\ &= \int (2x^2+5)\,dx + \int \left(\tfrac{3}{x} + \tfrac{-1}{x-1} + \tfrac{7}{(x-1)^2}\right) dx = \\ &= \tfrac{2}{3}x^3 + 5x + 3\ln|x| - \ln|x-1| - 7(x-1)^{-1} + C_0 \end{aligned}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Integre:

- $\dfrac{4x^2 - x + 20}{2x^2 - 10x + 12}$. [a]
- $\dfrac{-4x^4 + 7x^3 - x^2 - 3x + 3}{x^3 - x}$. [b]
- $\dfrac{9x^3 + 7x - 2}{3(x-1)(x-2)^2}$. [c]
- $\dfrac{x+3}{2x^3 - x^2}$. [d]

O próximo caso que devemos tratar é quando o denominador não é totalmente redutível. Ainda assim, seus fatores terão grau até 2 porque raízes complexas vêm sempre aos pares conjugados. O procedimento será o mesmo, nesse caso, mas apresentamos apenas as fórmulas mais simples (para um único fator quadrático com multiplicidade 1):

Caso de denominador com fatores irredutíveis de 2º grau

Com $b^2 - 4ac < 0$:

- $\dfrac{R(x)}{ax^2 + bx + c} = \dfrac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}$ (não é necessário intervir: R já é $Bx + C$).
- $\dfrac{R(x)}{(x-r)(ax^2 + bx + c)} = \dfrac{A}{x - r} + \dfrac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}$ (R **não** é $Bx + C$).

Para integrar, complete o quadrado, faça substituição e use arctg ou ln.

Os exemplos esclarecerão esses passos, lembrando que:

- $\int \frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1} = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C$;
- $\int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y + C$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos

$$\int \frac{4x+1}{x^2+6x+14}\,dx = \int \frac{4x+1}{(x+3)^2+5}\,dx =$$

$$= \int \frac{4\sqrt{5}\,y - 11}{5y^2+5}\,\sqrt{5}\,dy = \qquad (\text{com } y = \tfrac{x+3}{\sqrt{5}})$$

$$= 4\int \frac{y\,dy}{y^2+1} - \tfrac{11}{\sqrt{5}} \int \frac{dy}{y^2+1} =$$

$$= 2\ln(y^2+1) - \tfrac{11}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg} y + C =$$

$$= 2\ln\frac{x^2+6x+14}{5} - \tfrac{11}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}} + C$$

No próximo slide, o denominador é redutível, mas vamos repetir a técnica; portanto, não se espera que surja arctg na expressão da primitiva:

$$\int \frac{4x+1}{x^2+6x+5}\,dx = \int \frac{4x+1}{(x+3)^2-4}\,dx =$$

$$= \int \frac{8y-11}{4y^2-4}\,2\,dy = \qquad (\text{com } y = \tfrac{x+3}{2})$$

$$= 4\int \frac{y\,dy}{y^2-1} - \tfrac{11}{2}\int \frac{dy}{y^2-1} =$$

$$= 2\ln|y^2-1| - \tfrac{11}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C =$$

$$= 2\ln\left|\frac{x^2+6x+5}{4}\right| - \tfrac{11}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C$$

• Observe que, caso o termo quadrático seja ax^2+bx+c com $a \neq 1$, pode ser mais fácil escrever $a(x^2+(b/a)x+(c/a))$ e passar o a para fora da integral, antes de começar.

Pratique a técnica acima nestas funções, mesmo que o denominador quadrático não seja irredutível (ou seja, tenha discriminante positivo):

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Integre:

- $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+5}$.[a]
- $\dfrac{2x-3}{x^2+4x-2}$.[b]
- $\dfrac{x+2}{x^3+2x^2+5x}$.[c]

Raízes de termos quadráticos

Mesma técnica: complete o quadrado, faça substituição e use arcsen ou ln.

Exemplos

$$\int \sqrt{x^2+2x+7}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+6}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{y^2+6}\,dy = \qquad (\text{com } y = x+1)$$

$$= \tfrac{y}{2}\sqrt{y^2+6} + \tfrac{6}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+6}| + C =$$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+7} + 3\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+7}| + C$$

Para este procedimento, lembramos as primitivas de raízes de $\pm y^2 \pm a^2$, escrevendo $k > 0$ em vez de a^2:

- $\int \sqrt{y^2+k}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+k} + \frac{k}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+k}| + C$.
- $\int \sqrt{y^2-k}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2-k} - \frac{k}{2}\ln|y+\sqrt{y^2-k}| + C$;
- $\int \sqrt{k-y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{k-y^2} + \frac{k}{2}\operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{k}} + C$;
- $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+k}} = \ln|y+\sqrt{y^2+k}| + C$;
- $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-k}} = \ln|y+\sqrt{y^2-k}| + C$;

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\int \frac{dy}{\sqrt{k-y^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{k}} + C$.

Também poderão ser necessárias passagens para dentro da diferencial, como em $\int y\sqrt{y^2+k}\,dy = \int (y^2+k)^{1/2}\,d(y^2+k)/2 = (y^2+k)^{3/2}/3 + C$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} =$$

$$= \int \frac{3\,dy}{\sqrt{9-9y^2}} = \qquad (\text{com } y = \tfrac{x-2}{3})$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \operatorname{arcsen} y + C =$$

$$= \operatorname{arcsen} \frac{x-2}{3} + C$$

$$\int \frac{4x-5}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\,dx = \int \frac{4x-5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{25}{16}-(x-\frac{3}{4})^2}}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{5y-2}{\sqrt{\frac{25}{16}-(\frac{5y}{4})^2}}\,\tfrac{5}{4}\,dy = \qquad (\text{com } y = \tfrac{4x-3}{5})$$

$$= \tfrac{20}{\sqrt{2}} \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} - \tfrac{10}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= -\tfrac{20}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y^2} - \tfrac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsen} y + C =$$

$$= -\tfrac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{25-(4x-3)^2} - \tfrac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsen} \frac{4x-3}{5} + C$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Mostre que a substituição $y = 1/(px+q)$ transforma

$$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

em uma integral da forma anterior.

Use isso para calcular[a]

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Combinações trigonométricas

Expressões racionais de sen e cos: use $u = \operatorname{tg}(x/2)$; temos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2} \text{ e } \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

de modo que

$$dx = \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Trata-se de seguir estes passos:

- substituir cada seno, cosseno e a diferencial pelas expressões indicadas;
- simplificar a função racional resultante e integrá-la como vimos acima;
- substituir $u = \operatorname{tg}(x/2)$;
- se desejado, reescrever cada tangente em termos de seno e cosseno do ângulo $x/2$;
- se desejado, substituir essas funções pelas fórmulas

$$\operatorname{sen}(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$
$$\cos(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \text{ e}$$
$$\operatorname{tg}(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

para restaurar o ângulo original x.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Ao completar o terceiro passo, já podemos conferir a primitiva obtida. Os dois últimos passos podem ser executados também com outras simplificações, de modo mais conveniente ao caso em questão.

Exercício

Calcule[a]

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$$

Diversas identidades trigonométricas podem ser usadas para simplificar o integrando ou a primitiva; expecialmente os quadrados de seno e cosseno aparecem facilmente em algumas substituições:

Existem regras simples para $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ sendo $m, n \in \mathbb{Z}$.
Em particular:

- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$;
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

A título de exemplo, vamos explorar outra possibilidade para a primitivização do arco de raio $a > 0$:

Exemplo

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, d(a \operatorname{sen} t) =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \tfrac{1}{2}(\cos 2t + 1)\, dt =$$

$$= \tfrac{a^2}{2}(\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + t) + C = \tfrac{a^2}{2}(\operatorname{sen} t \cos t + t) + C =$$

$$= \tfrac{a^2}{2}\left(\tfrac{x}{a}\sqrt{1 - (\tfrac{x}{a})^2} + \operatorname{arcsen} \tfrac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \tfrac{x}{a} + C$$

Há muitas outras técnicas e não podemos exaurir todas. Elas são variantes dessas que apresentamos e podem ser conhecidas no capítulo especializado de Demidovitch ou no seu livro favorito de Cálculo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Porém, nem todas as funções aparentemente "simples" têm primitivas que possam ser expressas de modo "simples". Você jamais poderá integrar x^x, $x^{-1}\operatorname{sen} x$ ou a muito utilizada $\exp(-x^2)$ com as técnicas deste capítulo, porque suas primitivas não são combinações das operações e funções comuns que conhecemos. É claro que, para fazer essa afirmação, precisamos ter uma definição rigorosa de "função elementar" (o que não é difícil) e, para demonstrá-la, precisamos de uma teoria matemática chamada "Teoria de Galois Diferencial com Teorema de Liouville" (que, sim, é complicada). Porém, fica aqui o aviso: nem toda função pode ser integrada explicitamente!

Finalmente, podemos integrar uma série funcional termo a termo? No próximo capítulo, daremos uma resposta precisa à pergunta correspondente para integração definida. Aqui, observaremos apenas isto: Comentamos em "Análise Básica" sobre quando uma série converge e em "Derivação" sobre quando uma série pode ser derivada. Podemos integrar cada termo de uma série e utilizar esses conhecimentos, especialmente no caso de séries de potências, para perguntar quando a série obtida converge e é derivável. Tal investigação incluirá o detalhe de se a derivada dessa série é de fato a mesma série original.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 9

Integração Definida

9.1 Motivação e definição

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, queremos determinar área sob o gráfico (na lousa),

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Definição permitirá outras interpretações.

Trabalharemos com $a < b$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada: existem constantes m, M tais que

$$(\forall x \in [a,b])\ -\infty < m < f(x) < M < \infty.$$

Veremos um modo fácil de calcular integrais (o Teorema Fundamental do Cálculo, ou TFC), mas ele mascarará muitas aplicações da integral que requerem conhecimento de sua definição. Já encontramos essa peculiaridade antes: é bem mais fácil derivar uma função usando as regras usuais, embora seja a definição por limite que explique os usos dessa derivada.

Faremos uso básico dos conceitos de supremo e ínfimo (operadores sup e inf), que conhecemos melhor na "A Estrutura dos Números Reais". Aqui, basta saber que o supremo de um conjunto de números funciona como o valor máximo desses números, embora possa não pertencer ao conjunto. Por exemplo, $]0,5]$ é um conjunto cujo máximo é 5; já $]0,5[$ não tem máximo porque qualquer número nesse intervalo aberto ainda é menor que algum outro número também abaixo de 5; ambos os conjuntos têm *supremo* 5. Analogamente, podemos interpretar "ínfimo" como "mínimo". Usaremos a

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

seguinte notação:

$$\inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = \inf\{\, f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b \,\},$$

ou seja, esse é o ínfimo do conjunto de valores obtidos calculando-se $f(x)$ para cada $a \leqslant x \leqslant b$.

Uma *partição* $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ é

$$\mathcal{P}\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

para algum inteiro $n \geqslant 1$ e alguns $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Soma inferior (gráfico na lousa):
Área dos retângulos hachurados é

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \big[\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)\big].(x_i - x_{i-1}).$$

Note $m \leqslant \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x) \leqslant M$, então soma está bem definida.

Integral inferior:
Ao refinar-se $\mathcal{P}$, o número $s(f, \mathcal{P})$ cresce (diagrama na lousa), sempre limitado por $M(b - a)$.
Então

$$s_{[a,b]}(f) = \sup\{\, s(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b] \,\}$$

é real.

(Apenas chamamos sua atenção para a limitação por $M(b - a)$ para que o supremo $s_{[a,b]}(f)$ seja um número real, ainda limitado por $M(b - a)$. Caso não houvesse alguma limitação, então esse supremo seria ∞.)

O que estamos fazendo é exaurir a área do gráfico "por baixo"; a cada refinamento da partição, os retângulos cobrem mais e mais da região cuja área queremos determinar. Essa idéia já surgira na Antiguidade e era muito explorada pelos gregos.

Podemos fazer uma exaustão análoga "por cima":

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Soma superior e integral superior (gráfico na lousa):

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \big[\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)\big].(x_i - x_{i-1})$$

$$S_{[a,b]}(f) = \inf\{\, S(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } [a,b]\,\} \in \mathbb{R}$$

Temos $s_{[a,b]}(f) \leqslant S_{[a,b]}(f)$.

f é *Riemann-integrável* sobre $[a,b]$ quando $s_{[a,b]}(f) = S_{[a,b]}(f)$, e esse número é escrito $\int_a^b f(x)\,dx$.

Note: "integrável (segundo Riemann)" $\neq$ "tem primitiva" !!

Note: x não deve aparecer no valor.

Pode-se mostrar que $s_{[a,b]}(f) \leqslant S_{[a,b]}(f)$ por métodos puramente formais, sem se recorrer ao gráfico de f. Quando ambos os números coincidem, dizemos que f é integrável e chamamos o número de "integral de f (com respeito a x) de a a b".

Perceba que, integrando-se com respeito à variável x (isto é, acompanhando o integrando com dx), não deverá aparecer x nem nos extremos de integração (caso contrário, trata-se de má redação), nem no resultado final que, na ausência de outras variáveis, será um número real constante.

Exercício

Mostre pela definição que toda função constante é integrável e calcule sua integral sobre $[a,b]$.

Exercício

Mostre que $\chi_{\mathbb{Q}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q}; \end{smallmatrix} \right.$, não é integrável.

Exercício

Mostre que

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x = m/n \text{ reduzido,} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0, \end{cases}$$

é integrável; calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Esses exercícios não são difíceis, bastanto acompanhar a definição de integrabilidade com atenção e paciência. Fixe uma partição arbitrária de $[0,1]$ e mostre que a soma inferior de $\chi_{\mathbb{Q}}$ quanto a essa partição é 0, enquanto a soma superior é 1, porque qualquer intervalo da partição contém números racionais e irracionais. No caso de f, embora o mesmo ainda valha para os intervalos de qualquer partição, apenas um número finito de racionais têm imagem maior que qualquer $\varepsilon > 0$ e, portanto, podem ser "aprisionados" dentro de intervalos cada vez menores.

Discussão extraordinária: Não há nenhum método miraculoso que diga facilmente se uma dada função é integrável ou não. Além da própria definição, um resultado também abstrato é o *critério de Lebesgue* que enunciaremos aqui como tópico opcional e cuja demonstração deixaremos para um curso avançado de Análise.

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, seja Z_f o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Então f é integrável se e somente se, por menor que seja $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma sequência de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$Z_f \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} [\text{comprimento de } I_n] < \varepsilon.$$

Em outras palavras, f é integrável se é contínua fora de conjuntos (as uniões de intervalos) cujos "tamanhos" podem ser arbitrariamente pequenos. Diz-se que, nesse caso, Z_f tem *medida de Lebesgue zero.* (A cobertura ser infinita, ainda que enumerável, faz diferença significativa.)

Em particular, se Z_f é finito, então f limitada será integrável. De fato, sendo $Z_f = \{k_0, \ldots, k_{p-1}\}$, satisfaça a caracterização do critério usando $I_n = \emptyset$ para $n \geqslant p$ e $I_n = [k_n - \varepsilon/2p, k_n + \varepsilon/2p]$ caso contrário. Mais abaixo, quando efetivamente precisarmos integrar, recordaremos esse "fato". □

Intuitivamente, com "Confronto", temos

$$s(f,\mathcal{P}) \leqslant \text{Área} \leqslant S(f,\mathcal{P}),$$

então

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Isso pode ser formalizado com Teoria da Medida, que explica o conceito de área e permite calculá-la diretamente.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Essa área tem sinal! (Gráfico na lousa.)

$$\int_a^c f(x)\,dx = |A_1| - |A_2|$$

Para calcular

$$|A_1| + |A_2| = \int_a^c |f(x)|\,dx,$$

faremos

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Mostre $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (intuitivamente, comprimento de $[a, a]$ é 0).
Definimos

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

assim podemos integrar em qualquer ordem.

Exercício

Justifique geometricamente (e memorize) para f integrável e $a > 0$:
Se f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
Se f é par, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Isso será útil em situações, especialmente de teoria de Física ou outras aplicações, em que o integrando não é facilmente primitivizável, mas apresenta simetria. O que podemos formular para uma função integrável periódica?

Exercício

Use a definição de integral para mostrar que o deslocamento de um corpo com velocidade $V(t)$ ($t \in [a, b]$) ao longo de uma linha é $\int_a^b V(t)\,dt$. Mostre ainda que a distância percorrida é $\int_a^b |V(t)|\,dt$.

O fato do deslocamento ser numericamente igual à área sob o gráfico da velocidade é, portanto, *consequência* de duas interpretações da mesma definição de integral, não a causa: *a priori,* deslocamento nada tem a ver com área!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Solução: Em cada intervalo de uma partição da duração do movimento (t), a distância percorrida deverá estar entre os produtos do comprimento do intervalo (tempo transcorrido) pelo piso e pelo teto da velocidade naquele intervalo. O valor do deslocamento total, portanto, está entre os valores das somas inferior e superior para essa partição específica. Quando tomamos outras partições, no processo de refinamento, procedemos como no Teorema do Confronto: haverá um único número entre as somas inferiores e superiores, que precisa ser o deslocamento total e que é a integral designada por definição.

Quanto à distância total e o módulo da velocidade, o raciocínio é o mesmo. Caso a velocidade troque de sinal apenas um número finito de vezes, você poderá argumentar indiretamente, estudando agora as áreas positivas e negativas do gráfico. □

Somas de Riemann

Como calcular integrais?

Somas de Riemann ou TFC mais propriedades.

Para cada $k \geqslant 1$, divida $[a, b]$ em k pedaços iguais:

$$\mathcal{P}_k\colon a = x_{k0} < x_{k1} < \ldots < x_{kk} = b$$
$$\text{com } x_{ki} = a + \frac{b-a}{k} \cdot i.$$

Use $f(x_{ki})$ como aproximação para f em todo $[x_{k(i-1)}, x_{ki}]$.
Se f é integrável, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{f(x_{ki})}_{\text{aprox. altura do retângulo}} \cdot \underbrace{(b-a)/k}_{\text{base do retângulo}}.$$

(Restará a questão de f ser integrável; esse limite pode existir mesmo em caso contrário.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$\int_0^1 x^2\,dx$.

i-ésimo ponto da k-ésima partição é i/k.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(\tfrac{i}{k})^2(\tfrac{1}{k}) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{k} i^2 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^3}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{k})(2+\tfrac{1}{k}) = \tfrac{1}{3}.$$

Exercício

Calcule usando somas de Riemann, assumindo integrabilidade:

- $\int_0^1 6\,dx$.[a]
- $\int_3^5 6\,dx$.[b]
- $\int_0^1 x\,dx$.[c]
- $\int_3^5 x\,dx$.[d]
- $\int_3^5 x^2\,dx$.[e]
- $\int_2^7 (9x^2-12x+8)\,dx$.[f]

O que fizemos foi tomar, especificamente, "somas de Riemann com larguras constantes e calculadas sobre as extremidades direitas dos intervalos". Poderíamos também tomar as extremidades esquerdas, calculando $f(x_{k(i-1)})$, ou quaisquer pontos nos intervalos e, ainda, quaisquer intervalos. Vejamos os detalhes:

Discussão extraordinária: Para cada inteiro $k \geqslant 1$, suponha dada uma partição qualquer

$$\mathcal{P}_k\colon a = x_{k0} < x_{k1} \ldots < x_{kn_k} = b$$

que divide $[a,b]$ em n_k intervalos, não necessariamente de mesmo comprimento, mas, juntas, essas partições devem ser tais que $\lim_{k\to\infty}\|\mathcal{P}_k\| = 0$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

onde $\|\mathcal{P}_k\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n_k}(x_{ki} - x_{k(i-1)})$ é o "diâmetro" da k-ésima partição (ou seja, o comprimento de seu maior intervalo). Assim, os intervalos de $\mathcal{P}_k$ diminuem todos juntos conforme k aumenta; isso é mais do que simplesmente refinar partições (o que poderia, em princípio, deixar algum intervalo sempre "gordinho"). Suponha também dados pontos $t_{ki} \in [x_{k(i-1)}, x_{ki}]$. Se você for calcular algo assim, deverá *construir* partições e tomar pontos e *verificar* que essas condições são satisfeitas.

Em cada intervalo $[x_{k(i-1)}, x_{ki}]$, substituimos a função f pela função constante de valor $f(t_{ki})$. A área sob o gráfico de f será *aproximada*, então, pela soma das áreas dos retângulos cujos topos aproximam o gráfico de f. Se f é integrável, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \underbrace{f(t_{ki})}_{\text{aprox. altura do retângulo}} \cdot \underbrace{(x_{ki} - x_{k(i-1)})}_{\text{base do retângulo}}}_{\text{soma de Riemann}}.$$

Isso vale porque $\|\mathcal{P}_k\| \to 0$.

É possível mostrar que, fixada uma função limitada f, se *todas* as sequências de somas de Riemann tiverem o mesmo limite L — uma sequência sendo dada, para cada $k \geqslant 1$, por uma escolha de $\mathcal{P}_k$ e t_{ki} satisfazendo as condições acima — então f é integrável e $\int_a^b f(x)\,dx = L$. (Assim, não bastam algumas somas específicas como tomamos nos slides.)

Note que, em vista disso, esse procedimento é usado em alguns livros para *definir* a integral de Riemann. Frisamos que tal abordagem calcula a área sob o gráfico, ou qualquer outra interpretação da integral (como a posição em termos da velocidade), por *aproximações cada vez melhores.* Isso é conceitualmente muito diferente do cálculo por *exaustão* (*inferior versus superior*) que adotamos anteriormente como definição. □

Até aqui, temos assumido que nossas funções são integráveis para podermos trabalhar. *A partir de agora, convém ter certeza de que não nos equivocamos, porque os teoremas que usaremos podem dar resultados inválidos, sem qualquer aviso, caso a função em questão não seja integrável.* Usaremos o seguinte:

Fato
Toda função limitada que seja contínua, ou descontínua em apenas um nº finito de pontos, é Riemann-integrável.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Note que a limitação é importante! Neste momento, não podemos considerar funções como $1/x$ ao redor de 0, apesar de sua única descontinuidade.)

É costume integrar funções sobre subintervalos do domínio original. Assim, se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é integrável, onde I é um intervalo fechado e limitado, os limites a, b em $\int_a^b f(x)\,dx$ não precisam ser necessariamente os extremos de I, mas quaisquer pontos em I. (As convenções acima nos permitem tomar até mesmo $a \geqslant b$.) Nesse caso, com $a < b$, o que se está integrando é a restrição $f|_{[a,b]}$. Pode-se mostrar que essa restrição também é integrável (ela é igual ao produto $f \cdot \chi_{[a,b]}$), seja sobre I ou $[a, b]$.

Assim, enunciaremos as próximas propriedades para funções limitadas sobre um intervalo I limitado e fechado, ao qual todos os limites de integração deverão pertencer. Não explicitaremos I, mas é preciso sempre lembrar que "função integrável" é "função integrável *sobre um certo intervalo limitado e fechado*".

9.2 Propriedades e cálculo

Para quaisquer a, b, c, se existem $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_b^c f(x)\,dx$, então existe

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

(Diagrama na lousa.)

Essa propriedade é geometricamente óbvia quando $a < b < c$ e, para os demais arranjos entre a, b e c (incluindo sobreposição), é consequência de nossas convenções sobre $\int_a^a = 0$ e $\int_b^a = -\int_a^b$. Para demonstrar o caso $a < b < c$ rigorosamente, devemos retornar à definição de Riemann, sendo a idéia central apenas refinar uma partição dada qualquer de $[a, c]$, para trabalhar com uma nova partição que contenha b e, portanto, possa ser separada em partições de $[a, b]$ e $[b, c]$.

Por indução, ou generalizando-se a demonstração, vemos que se $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ e f é integrável em cada $[a_i, a_{i+1}]$ então f é integrável em todo o $[a_0, a_n]$, com

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Assim, integrabilidade de funções contínuas implica integrabilidade para funções descontínuas em apenas um número finito de pontos.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Refinar partições também é a operação principal para demonstrar várias das propriedades que apresentaremos. Frequentemente, trabalhar com a definição sobre duas funções ou dois intervalos requer considerar partições diferentes. Sobre um mesmo intervalo, essas partições podem ser imediatamente refinadas a uma partição comum.

Linearidade

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) \pm \ldots \pm c_k f_k(x)\big)\, dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \ldots \pm c_k \int_a^b f_k(x)\, dx$$

Dominância

$$f \geqslant g \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx \geqslant$$

Controle

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

A propriedade de dominância também pode ser formulada como

$$f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0,$$

que se segue imediatamente da definição, aplicando-se à diferença $f - g \geqslant 0$ para demonstrar a formulação do slide. Note que o intervalo de integração é o mesmo.

O produto de duas funções integráveis também é integrável, mas o valor da integral do produto não guarda relação com os valores das integrais originais. Se f é integrável e $1/f$ também é limitada, então é integrável.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC, Barrow)
Se f é integrável e $F' = f$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Cuidado com sinais! Use parênteses!)
Notações usuais para $F(b) - F(a)$:

$$\underbrace{\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}}_{\text{prefira}} = \big[F(x)\big]_a^b = F\big|_a^b$$

Aprecie a importância dupla deste teorema!

Primeiramente, ele é usado para a imensa maioria dos cálculos com integrais, provalvelmente se esquecendo das somas de Riemann. Ainda assim, integração numérica é muito utilizada (porque é mais prática para computadores que o TFC) e deve-se aprender, em um curso específico de Cálculo Numérico, diversas técnicas cujo objetivo é ter limites que convirjam mais rápido que nossos limites de somas de Riemann e com fórmulas específicas para os erros máximos.

Em segundo lugar, o TFC conecta as duas ferramentas mais importantes do Cálculo (a integração e a derivação, que aparece disfarçada na primitivização), cujos conceitos e definições são, inicialmente, muito díspares.

Exemplos

- $\int_0^1 x^2\,dx = [x^3/3]_0^1 = (1^3/3) - (0^3/3) = 1/3.$
- $\int_0^6 |x-4|\,dx = \int_0^4 (4-x)\,dx + \int_4^6 (x-4)\,dx = 8 + 2 = 10.$
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = (-\cos\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos\tfrac{-\pi}{2}) = 0.$
- $\int_\pi^0 \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_\pi^0 = (-\cos 0) - (-\cos\pi) = -2.$

(No último exemplo, para proceder-se rigorosamente, transforma-se em $-\int_0^\pi$, aplica-se o TFC e inverte-se novamente.)

É perfeitamente possível f ser integrável e não termos nenhuma expressão simples para F, como veremos quanto a $\exp(x^2)$. Por outro lado, existem funções f cuja primitiva pode ser escrita explicitamente e, ainda assim, não são integráveis segundo Riemann: é o caso da "função de Volterra".

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Demonstração do TFC: Convém estudá-la! Com $F' = f$, queremos dizer que existe uma função F definida em *todo* o intervalo $[a, b]$ e cuja derivada, em *todo* esse intervalo, é a função f. (Isso requer um pouco de cuidado com a primitiva obtida para f.) Então F é derivável e, portanto, contínua (em todo o intervalo). Além disso, f já deve ser integrável.

Nessas condições, qualquer soma de Riemann serve para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$. Com a notação que usamos para esse tópico, digamos que já escolhemos as partições $\mathcal{P}_k$ com diâmetro convergindo a zero (por exemplo, pondo $n_k = k$ e $x_{ki} = a + i(b-a)/k$) e que devemos apenas obter os pontos $t_{ki} \in [x_{k(i-1)}, x_{ki}]$.

Usaremos aqueles dados pelo TVM para F de modo que

$$F'(t_{ki}) = \frac{F(x_{ki}) - F(x_{k(i-1)})}{x_{ki} - x_{k(i-1)}}.$$

Como $F' = f$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(t_{ki}) \cdot (x_{ki} - x_{k(i-1)}) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \big(F(x_{ki}) - F(x_{k(i-1)})\big) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \big(F(x_{n_k}) - F(x_0)\big) = F(b) - F(a). \qquad \square\end{aligned}$$

Qualquer outra primitiva de f serviria, em vez de F; na expressão do TFC, obviamente, a constante de integração cancela-se e, em geral, é omitida.

Exercícios

- Confira, usando o TFC, seus resultados para os exercícios anteriores.
- Incorpore o TFC à sua resposta ao exercício de integração de velocidade.
- Compare o sinal da área sob o gráfico de $x^{-2}|_{[-1,1]}$ e o resultado que seria dado pelo TFC. Justifique a discrepância.

A integral definida é utilizada para definir o *valor médio* da função ao longo do intervalo em estudo: basta calcular

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

com cuidado para não esquecer o fator $b-a$, que é o comprimento do intervalo. Assim, o valor médio de f é aquele de uma função constante cuja integral sobre o mesmo intervalo (ou seja, a área do retângulo) é igual à de f. Como isso tem inúmeras aplicações disso, enunciaremos um "Teorema do Valor Médio" a respeito:

TVM integral

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Assim, o valor médio da função é realizado em algum ponto.

(Esse resultado também vale para algumas funções descontínuas, mas não todas.)

Demonstração extraordinária: Sendo I o valor da integral e m, M os valores mínimo e máximo de f no intervalo (cuja existência é dada por Weierstrass), temos $m(b-a) \leqslant I \leqslant M(b-a)$ pela definição de integral. (Isso é evidente em termos da "área sob o gráfico".) Então $m \leqslant I/(b-a) \leqslant M$ e, pelo TVI aplicado a f contínua, existe esse c tal que $f(c) = I/(b-a)$. □

Assuma, agora, que f é contínua em um intervalo. Fixe um ponto a nele e defina

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du.$$

Note que a variável x agora é um limite da integração e usamos outro nome (u) para a "variável muda de integração".

Mostraremos que $F_a' = f$, ou seja, a integral definida produz uma primitiva. Isso não significa que F_a possa ser expressa de algum jeito simples e sua utilidade será somente teórica.

Devemos mostrar que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F_a(x+h) - F_a(x)) = f(x)$, com x arbitrariamente fixado. Temos $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(u)\,du$. De acordo com o TVM integral, essa integral é igual a $f(u_h)\cdot(x+h-x)$ para algum u_h entre x e $x+h$ (caso $h \leqslant 0$, basta reescrever a integral). Assim, precisamos apenas que $\lim_{h\to 0} f(u_h) = f(x)$, mas $h \to 0$ implica que $u_h \to x$ porque a distância entre ambos é no máximo $|h|$ e basta, então, invocar a continuidade de f.

Intuitivamente, o acréscimo da área sob o gráfico, de x a $x+h$, pode ser aproximado como um retângulo de base h e altura $f(x)$. Vamos frisá-lo:

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Corolário — 2ª parte do TFC

Se f é contínua, então

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

é uma primitiva de f.

Nesse ponto, podemos reprovar o TFC, embora ainda sob a hipótese mais forte de continuidade de f: Pelo TVM de derivação, F_a e qualquer primitiva F de f diferem por apenas uma constante, digamos $F = F_a + C$. Por definição, $F_a(a) = 0$, então $C = F(a)$ e $F(x) = \int_a^x f(u)\,du + F(a)$.

Note o papel de $F(a)$ como uma constante de integração e sua utilidade em ajustar F à integral; no movimento retilínio uniformemente variado, por exemplo, temos $V(t) = V(0) + \gamma t$ e $s(t) = \int_0^t (\gamma\tau + V(0))\,d\tau + s(0) = \gamma t^2/2 + V(0)t + V(0)$; você pode deduzir $V(t)$ a partir de $\dot{V} = \gamma$ do mesmo modo.

É claro, também, que F_a é contínua porque é derivável; de fato, é de classe C^1.

Se f não fosse contínua, o que saberíamos sobre F_a? Muitas patologias poderiam acontecer, mas deixamos a seu cargo avaliar isto, mesmo que intuitivamente: Se f é descontínua apenas em um número finito de pontos, então F_a é contínua. Ou seja, integração "mata" descontinuidades isoladas.

Também aprendemos, assim, a derivar $\int_6^x (5u-4)\,du$ com respeito a x: é $5x - 4$. Para derivar algo da forma $\int_x^6$, transforme-a em $-\int_6^x$.

Mudança de variável

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\varphi\colon [p,q] \to [a,b]$ de classe C^1 com $\varphi(p) = a$ e $\varphi(q) = b$, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_p^q f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

Exemplo: $\int_5^9 (x-2)^\pi\,dx \overset{u=x-2}{=\!=\!=} \int_3^7 u^\pi\,du = [u^{\pi+1}/(\pi+1)]_3^7 = (7^{\pi+1} - 3^{\pi+1})/(\pi+1)$.

Muito pouco é requerido de φ: somente que os extremos estejam correspondidos e que a mudança seja suave. Não é preciso bijeção ou monotonicidade, por exemplo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Seu livro de Cálculo traz uma demonstração desse resultado, onde as hipóteses sobre f e φ são explicitamente utilizadas, mas é claro que se tem em mente a mesma operação de substituição utilizada para integrais indefinidas, com $x = \varphi(u)$ e $dx = \varphi'(u)\,du$.

Enfim, você pode preferir calcular a primitiva e a substituição em separado; o exemplo acima fica assim:

$$\int_5^9 (x-2)^\pi\,dx = \left[\int (x-2)^\pi\,dx\right]_{x=5}^{x=9} = \left[\int u^\pi\,du\right]_{x=5}^{x=9} = \left[\tfrac{u^{\pi+1}}{\pi+1}\right]_{x=5}^{x=9} = \left[\tfrac{(x-2)^{\pi+1}}{\pi+1}\right]_{x=5}^{x=9} = \tfrac{7^{\pi+1}-3^{\pi+1}}{\pi+1}.$$

Na teoria, porém, especialmente em Física e outras aplicações, será importante conhecer o teorema na forma da integral definida.

Trabalho

Posição s e força F (componente na direção do deslocamento).
Trabalho $\mathcal{T} = \int_{s_a}^{s_b} F\,ds$.
Para $F(t), s(t)$:

$$\mathcal{T} = \int_{s(a)}^{s(b)} F(t)\,ds(t) = \int_a^b F(t)v(t)\,dt$$

($ds = \dot{s}\,dt = v\,dt$ para velocidade $v(t)$.)

Pode-se tomar a primeira integral como a *definição* de trabalho ou procurar uma dedução a partir do conceito de "força vezes distância percorrida" quando a força é constante. A segunda abordagem é análoga à que fizemos para deslocamento como integral da velocidade: em cada intervalo de uma partição da trajetória (s), o trabalho realizado deverá estar entre os produtos do comprimento do intervalo (distância percorrida) pelo piso e pelo teto da força naquele intervalo. O trabalho total, portanto, fica igualado à integral designada quando as somas inferior e superior são confrontadas no processo de refinamento.

Discussão: Expressão para a energia cinética? Em Física, postula-se que que $F = m\dot{v}$ e que o trabalho iguala a mudança de energia cinética. Com a notação acima, temos $\mathcal{T} = \int_a^b m\dot{v}v\,dt = m\int_{t=a}^{t=b} v\,dv = mv_b^2/2 - mv_a^2/2$, onde novamente fizemos uma mudança de variável para integrar diretamente com respeito a v. Quando $v(a) = 0$, isto é, parte-se do repouso (em que a energia cinética deve ser nula), o trabalho realizado iguala uma expressão envolvendo a velocidade final $v(b)$ e, por hipótese, a energia cinética final, daí saindo a expressão $mv^2/2$ para essa energia. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Finalmente, retornamos ao problema das séries funcionais. (Vamos trabalhar novamente com um intervalo compacto de extremos $a < b$; se a integral for imprópria, será preciso ainda trabalhar com o limite de sua definição.) Podemos integrar cada termo e somar a nova série?

A resposta novamente faz uso do conceito de convergência uniforme que comentamos em "Análise Básica". Se uma sequência de funções integráveis $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, então esta f é integrável e $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. Por exemplo, se as f_n são contínuas, então f é contínua e, destarte, integrável. Demonstrá-lo não é difícil, mas requer bastante atenção com partições e outros detalhes de um jeito engenhoso. Porém, observamos aqui que se faz uso da propriedade de "controle" que enunciamos anteriormente, na forma

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x) - f_n(x)\big|\,dx,$$

de modo que se $\|f_n - f\| < \varepsilon$ (possível pela convergência uniforme) então a última integral é menor que $(b-a)\varepsilon$ e as duas integrais da primeira diferença estão muito próximas.

Para séries funcionais, concluímos: Dadas $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis de modo que $\sum_{n=0}^\infty f_n$ convirja uniformemente, então esta função é integrável e $\int_a^b \big(\sum_{n=0}^\infty f_n(x)\big)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx$.

No caso particular de séries de potências, obtemos:

Integração de séries de potências

Sejam R raio conv. $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ e $[a,b] \subseteq]x_0 - R, x_0 + R[$. Então

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

integrada termo a termo.

As somas parcias da série de potências são polinômios, certamente integráveis, e a convergência no subintervalo fechado $[a,b]$ é uniforme, de modo que a propriedade no slide é consequência direta de nossa conclusão para séries funcionais.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

9.3 Aplicações geométricas da integral

(Em geral, $a < b$ em tudo.)

Cálculo de áreas

Em geral, pede-se *área total,* soma de áreas sem sinais.

Faça diagrama, escolha melhor partição e melhor sentido (vertical ou horizontal), use TFC.

(Exemplos e exercícios na lousa.)

Para todas as aplicações que veremos, lembre-se de procurar mais exemplos e exercícios para praticar. Afinal, quem sabe as áreas loucas e os volumes doidos que você deverá calcular em sua profissão?

Comprimento da curva do gráfico

(Diagrama na lousa.)

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Se f tiver um bico em c, faça $\int_a^c + \int_c^b$ etc.

Como funciona: Vamos vestir roupagem da Física; para formalizar, basta juntar todos os pedaços. Suponha que o gráfico é a trajetória linear de um ponto material e que, no instante $t \in [a, b]$, ele tem coordenadas $x = t$ e $y = f(x) = f(t)$. (Em "Funções de Várias Variáveis", você estudará o caso geral de uma curva $(x(t), y(t))$.) Sua velocidade vetorial tem componentes horizontal $\frac{dx}{dt} = 1$ e vertical $\frac{dy}{dt} = f'(t)$; logo, tem valor absoluto $v(t) = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}$. O deslocamento é

$$\int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

e é igual à distância percorrida porque $v(t) \geqslant 0$ sempre.

Por exemplo, considere o arco de circunferência de raio $a > 0$ dado por $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ para $0 \leqslant x \leqslant a$. Como se trata de um quarto da circunferência completa, esperamos que seu comprimento seja $\pi a/2$. De fato, $f'(x) = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$ e então $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = a/\sqrt{a^2 - x^2}$, cuja integral de 0 a a é $[a \operatorname{sen}^{-1}(x/a)]_0^a = \pi a/2$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Volume do sólido de rotação ("torneado")

(Diagrama na lousa.) Secção em s com raio $r(s)$:

$$V = \int_a^b \pi(r(s))^2\,ds = \pi \int_a^b r^2\,ds$$

Se houver ocos ou rebordos, subtraia: $V = \int_a^b \pi f^2 - \int_a^b \pi g^2 + \int_a^b \pi h^2$ etc. (conforme diagrama).

Evidentemente, você deve tomar cuidado com qual eixo é o eixo de rotação. Se é em torno das abscissas, então a integral carrega dx; se é em torno das ordenadas, a função deve ser em termos de y e a integral carrega dy.

Como funciona: "Gire" a definição de integral ao redor do eixo das abscissas. Note que, então, as somas inferior e superior da função tornam-se somas de volumes de cilindros coaxiais; qual é o volume de cada cilindro? Essas somas de cilindros exaustam o sólido por dentro e por fora, respectivamente.

Tome cuidado com a letra r, que indica o tamanho do raio ao longo da secção do sólido de rotação, perpendicular ao eixo, não outros raios que porventura apareçam! Por exemplo, no caso de uma esfera obtida por rotação ao redor do eixo das abscissas da região limitada pelo próprio eixo e por $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ para $-a \leqslant x \leqslant a$, esperamos obter o volume $4\pi a^3/3$. Pela fórmula que apresentamos, vem $\int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi[a^x - x^3/3]_{-a}^{a} = 4\pi a^3/3$.

Cascas cilíndricas: Pode ser mais natural expressar a espessura do sólido em função do raio, isto é, da distância ao eixo de revolução. Nesse caso, o sólido é obtido por rotação da região delimitada por $r = a$, $r = b$, $h = 0$ e $h = h(r)$. A dedução é a mesma, usando cilindros concêntricos cuja base é a circunferência de comprimento $2\pi r$ e a altura é $|h(r)|$, de modo que a fórmula final é $\int_a^b 2\pi r|h(r)|\,dr$. □

Resolva cada exercício a seguir dos dois modos:

Exercício

Determine o volume do toro com raio R cujo tubo tenha raio r, sendo $R > r$.[a]

De modo mais geral, com o mesmo procedimento por exaustão, obtemos esta regra:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Volume de sólido seccionado

(Diagrama na lousa.) Secção perpendicular em s com área $A(s)$:

$$V = \int_a^b A(s)\,ds$$

(Note: as secções não podem "entortar", devendo ser paralelas.)

Aqui, em vez de cilindros, trabalhamos com paralelepípedos retângulos de base correspondente a $A(s)$.

Exercício

Calcule o volume do sólido cuja base horizontal é um triângulo equilátero de lado L e cujas secções verticais perpendiculares a um dos lados do triângulo são quadrados.

A essa altura, você já deve ter absorvido a idéia de manipulação "desleixada" de alguns livros de Cálculo. Não há nada errado com o desleixo, desde que ele possa ser formalizado. Neste caso, trata-se de calcular o volume do sólido "fatiando-o" em lâminas de área $A(s)$ e altura ds, cujos volume são $A(s)\,ds$, e integrando esses "elementos de volume".

Cuidado, porém, com o "desleixo": essas "fatias" devem ser cilíndros ou paralelepípedos, para seu volume ser "área da fatia vezes altura diferencial". Em outras situações, a conta ainda pode dar certo: no círculo de raio $a > 0$, para r indo de 0 a a, cada circunferência tem raio $2\pi r$ e então a área do círculo será a "soma" dessas circunferências, isto é, $\int_0^a 2\pi r\,dr = \pi a^2$; o mesmo raciocínio funciona para obter o volume da esfera integrando-se a superfície de cascas concêntricas. Porém, como comentaremos a seguir, é preciso firmeza sobre a exaustão em progresso.

Área da superfície de revolução

Secção em s com $r(s)$.

$$A = \int_a^b 2\pi r(s)\sqrt{1+(r'(s))^2}\,ds = 2\pi\int_a^b r\sqrt{1+(r')^2}\,ds$$

Se houver ocos ou rebordos, some (conforme diagrama): $A = \int_a^b 2\pi f\sqrt{1+f'^2} + \int_a^b 2\pi g\sqrt{1+g'^2} + \int_a^b 2\pi h\sqrt{1+h'^2}$ etc.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Atente que $A \neq \int_a^b 2\pi r(s)\,ds$, valor que se poderia esperar calculando cada circunferência e integrando tudo.

Por exemplo, para a esfera como acima, temos $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} = 2\pi a$ (constante), de modo que sua área é $\int_{-a}^{a} 2\pi a\,dx = 2\pi a[x]_{-a}^{a} = 4\pi a^2$.

Exercício

Determine a área do toro com raio R cujo tubo tenha raio r, sendo $R > r$.[a]

Área de curvas em coordenadas polares

Área entre ângulos α, β e curva $r(\theta)$ (vide lousa) é

$$\int_\alpha^\beta \frac{(r(\theta))^2}{2}\,d\theta.$$

Coordenadas polares devem ser fartamente estudadas em um bom curso de geometria (analítica?). Aqui, vamos apenas recordar que $0 \leqslant r < \infty$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$, dando $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Geralmente, r é apresentado em termos de θ. *Mais do que nunca, fazer um bom diagrama ajuda a entender a região cuja área deve-se calcular!*

Como funciona: Mais uma vez, é feita uma exaustão dessa área por dentro e outra por fora. Em vez de retângulos, porém, utilizamos setores circulares (fatias de pizza); um tal setor de raio R e ângulo γ tem área $\gamma/2\pi$ vezes πR^2, ou seja, $R^2\gamma/2$. Basta, então, escrever as somas inferior e superior correspondentes a uma partição de $[\alpha, \beta]$. A figura lembra, note bem, um "leque" e não uma "zebra".

Por exemplo, o círculo de raio a é simplesmente dado por $r(\theta) = a$. Pela fórmula do slide, sua área é $\int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\,d\theta = \frac{a^2}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \pi a^2/2$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Centro de massa

Densidade laminar $\rho(x,y)$ (kg/cm^2) na região limitada por $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=g(x)$ com $a \leqslant b$ e $f \leqslant g$. (Diagrama na lousa.) Temos:

$$\text{Massa } M = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \rho(x,y)\, dy \right) dx$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} x\rho(x,y)\, dy \right) dx$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} y\rho(x,y)\, dy \right) dx$$

Encare esse formulário apenas como uma motivação para o curso de "Funções de Várias Variáveis", que é o lugar natural de integrais múltiplas. Aqui, queremos apenas reconhecer as fórmulas prontas que podem ser encontradas nos livros-texto e aproveitar para praticar o cálculo de integrais.

O cálculo deve ser iniciado pela integral mais interna, entre os parênteses.

Estamos fazendo o seguinte: Temos uma lâmina de algum material delgado (um metal, por exemplo, cuja densidade em cada ponto é dada pela função ρ, em termos de massa por unidade de área (já que a terceira dimensão não é considerada). Fixe algum $x \in [a,b]$: então $f(x), g(x)$ são números fixos e, para y entre esses números, podemos integrar ρ ao longo desse segmento, obtendo sua "massa" (exceto que o segmento não possui largura). Essa nova densidade linear é função de x que, ao ser também integrada, dará a massa toda.

Para determinar as coordenadas do centro de massa, basta repetir o processo, agora com fatores multiplicativos no integrando, não se esquecendo de dividir pela massa. O ponto obtido é aquele onde a lâmina pode ser equilibrada horizontalmente sobre uma agulha vertical. Deixamos a justificativa disso, porém, para o próximo curso.

Se a lâmina for homogênea, podemos assumir $\rho = 1$ (ou outra constante) e M será realmente a área da lâmina, enquanto nesse caso específico o ponto $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}})$ é chamado *centro geométrico ou centróide* da região delimitada. (Não confundir com centro gravitacional, cuja definição é diferente, embora geralmente os dois pontos coincidam quando a densidade é constante.)

Para você ter certeza de entender bem essas fórmulas, simplifique-as ao máximo assumindo que $\rho = 1$; para M, você deverá entender a integral resultante como a área da região dada.Depois:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício
Determine o centro geométrico da região limitada por $y = x^2$ e $y = 9$.

Talvez você queira exercitar seus músculos e provar, usando tais fórmulas, os Teoremas de Pappus–Guldin: a superfície e o volume de um sólido de rotação (sem sobreposição) são iguais a CP e CA, respectivamente, onde C é o comprimento da circunferência descrita pelo centro da região rotacionada, P é o perímetro dessa região e A é sua área. (Um diagrama adequadamente arranjado facilitará sua vida.) Assim, o sólido de rotação é comparável a um cilindro (qual?); a extensão pelo lado de fora da curva é compensada pela compressão por dentro.

9.4 Integrais impróprias

Discutimos funções limitadas sobre intervalos limitados.
E se a função ou o intervalo forem ilimitados?
Solução sempre é tomar limite: essa será a definição.

Exemplos-definições
Se $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$ tem cada $f|_{[a,M]}$ integrável, define-se

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx.$$

Se $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ tem cada $f|_{[a,b-\delta]}$ integrável, define-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx.$$

Analogamente: $\int_{-\infty}^b$, $\int_{-\infty}^\infty$, $\int_a^b = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b$, etc.
Se limite é real, diz-se que a integral *converge.*
Caso contrário (incluindo $\pm\infty$), diz-se que a integral *diverge.*

Se $f\colon]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tem cada $f|_{[M,b]}$ integrável, define-se

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)\,dx.$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se $f\colon\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ tem cada $f|_{[a+\delta,b]}$ integrável, define-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Em vez de $\delta \to 0^+$, podemos usar $\xi \to a^+$ ou $\xi \to b^-$, substituindo os limites de integração de acordo, o que pode facilitar cálculos com o TFC.

Podemos ainda ter combinações desses tipos: por exemplo, sobre o domínio $]a,\infty[$ e fixando algum número $b > a$, podemos fazer

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\xi\to a^+} \int_\xi^b f(x)\,dx + \lim_{M\to\infty} \int_b^M f(x)\,dx.$$

Também, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem cada $f|_{[-M,M]}$ integrável, define-se

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M f(x)\,dx,$$

que é a mesma coisa que fazer

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

se ambas as integrais do lado direito convergirem.

Exemplos

- $\int_0^\infty \exp(-x)\,dx =$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty} [-e^{-x}]_0^M = \lim_{M\to\infty} [-e^{-M}+1] = 1.$$

- $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$ (gaussiana).

A "integral gaussiana" tem esse nome devido a seu grande uso por Gauss na teoria de erros, mas também pode ter os nomes de Euler e Poisson. Você trabalhará muito com ela em cursos de Estatística e Probabilidade, porque a função $\exp(-x^2)$ é a base da distribuição normal.

Discussão extraordinária: Apresentamos uma forma de calculá-la devida a Constantine Georgakis (1994); a única passagem que ainda não sabemos

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

fazer será a troca da ordem de integração, que você aprenderá em "Funções de Várias Variáveis". Primeiramente, notamos que o integrando é uma função par, então basta mostrarmos (conforme a definição usando limite) que $\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}/2$, ou seja, que $\left[\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx\right]^2 = \pi/4$. Desse modo, renomeando-se uma variável, devemos calcular

$$\left(\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx\right)\left(\int_0^\infty \exp(-y^2)\,dy\right).$$

Nessa expressão, consideramos x e y independentes; então, com respeito a cada variável, a outra integral é simplesmente uma constante (assumindo-se finita) que pode ser passada para dentro. Assim, temos

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-y^2)\,dy\right)\exp(-x^2)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-(y^2+x^2))\,dy\right)dx.$$

Fazendo a substituição $y = xs$ para a integral de dentro, com $dy = x\,ds$ (já que x independe de y) e $0 < s < \infty$ (já que $x > 0$), e trocando a ordem de integração, obtemos

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-x^2(1+s^2))\,x\,ds\right)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-x^2(1+s^2))\,x\,dx\right)ds.$$

A nova integral de dentro é fácil de calcular (usando $d(x^2)/2$), de modo que a expressão toda resulta em

$$\int_0^\infty \Big[\frac{\exp(-x^2(1+s^2))}{-2(1+s^2)}\Big]_{x=0}^{x\to\infty} ds = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \tfrac{1}{2}[\mathrm{tg}^{-1}\,s]_{s=0}^{s\to\infty} = \pi/4,$$

como queríamos. □

Exemplos em $[1,\infty[$ (gráficos na lousa)

- $x^{1/2}$ ilimitada: $\int_1^\infty x^{1/2}\,dx = \lim_{M\to\infty}[\frac{x^{3/2}}{3/2}]_1^M = \infty$.
- $x^{-1/2}$ limitada: $\int_1^\infty x^{-1/2}\,dx = \lim_{M\to\infty}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_1^M = \infty$.
- x^{-1} limitada: $\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \lim_{M\to\infty}[\ln x]_1^M = \infty$.
- $x^{-3/2}$ limitada: $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = \lim_{M\to\infty}[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}]_1^M = 2$.
- Regra geral: $\int_1^\infty x^r\,dx$ converge $\Leftrightarrow r < -1$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos em $]0,1]$ (gráficos na lousa)

- $x^{1/2}$ limitada: $\int_0^1 x^{1/2}\,dx = [\frac{x^{3/2}}{3/2}]_0^1 = 2/3$.
- $x^{-1/2}$ ilimitada: $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_\delta^1 = 2$.
- x^{-1} ilimitada: $\int_0^1 x^{-1}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}[\ln x]_\delta^1 = \infty$.
- Regra geral: $\int_0^1 x^r\,dx$ converge $\Leftrightarrow r > -1$.

Poderíamos, dada uma dessas funções ilimitadas em $]0,1]$, atribuir-lhe um valor qualquer em 0. Essa extensão teria domínio $[0,1]$, mas continuaria ilimitada e não poderíamos discutir integral de Riemann para ela. Vemos, porém, que poderíamos determinar sua integral *imprópria* nesse intervalo, porque em cada $[\delta,1]$ a função original é limitada.

Exercício
Demonstre as regras de convergência para $\int_1^\infty x^r\,dx$ e $\int_0^1 x^r\,dx$. Reenuncie-as com o integrando $\frac{1}{x^p}$.
O que você conclui sobre as integrais $\int_0^\infty x^r\,dr$?

Vemos que poderíamos calcular $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$ pelo método do TFC diretamente, por substituição direta (isto é, sem usar limites): $[2\sqrt{x}]_0^1 = 2$. Isso acontece muito frequentemente, mas devemos sempre observar as hipóteses do TFC para aplicá-lo porque essa integral é, de fato, imprópria. Veja, por exemplo, o próximo exercício:

Exercício
Mostre que $\int_{-1}^1 x^{-2}\,dx$ é uma integral imprópria e calcule-a.

Você pode ver, pela definição de integral imprópria usando limites, que se $f \leqslant g$ em todo $[a,\infty[$, então $\int_a^\infty f(x)\,dx \leqslant \int_a^\infty g(x)\,dx$.

Assuma ainda $0 \leqslant f \leqslant g$: nesse caso, cada integral ou converge ou vale ∞. Então, se a integral de g convergir, aquela de f também converge; se a integral de f divergir, aquela de g também diverge.

Se f trocar de sinal, vale o seguinte: se $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ convergir, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ também converge. (Compare com o conceito de convergência absoluta.) Por exemplo, $\int_{-\infty}^0 e^x \operatorname{sen} x\,dx$ converge.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Esse estudo comparativo de convergência oferece um critério para a convergência de séries numéricas:

Critério da integral para séries
Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:
Suponha $f\colon [K, \infty[\to \mathbb{R}^{>0}$ contínua decrescente com $f(n) = a_n$.
Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \int_K^{\infty} f(x)\,dx$ converge.
(Gráfico na lousa.)

Atente que *ninguém falou* que o valor limite da série e o valor da integral são iguais; geralmente, não são!

Demonstração: Basta construir duas funções assim: $g(x) = a_n$ se $n \leqslant x < n+1$ e $h(x) = a_n$ se $n - 1 \leqslant x < n$. Então, no domínio de f, temos $0 \leqslant h \leqslant f \leqslant g$ em vista de f ser decrescente. Contudo, as integrais impróprias de g e h são (por definição!) somas de "caudas" da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e sua convergência equivale à da série. O fato de f ser contínua possibilita integrarmos f em intervalos compactos, para então tomar a integral imprópria. Se a integral de f convergir, também a de h converge; se a integral de g convergir, a de f também converge; isso prova o critério. □

Exercício
Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \Leftrightarrow p > 1$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Parte III

Várias Variáveis

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 10

Os Espaços Euclideanos

O estudo de funções de várias variáveis requer o mesmo trabalho preliminar daquelas de uma variável, ou seja, o conhecimento de seu domínio e os conceitos de limite e continuidade, que fizemos nos Capítulos "A Estrutura dos Números Reais", "Introdução aos Limites" e "Análise Básica".

Em termos formais, deveríamos conduzir esse trabalho com o mesmo rigor, mas, para a proposta deste *Guia,* podemos apenas rever as formulações mais úteis e lembrar que tal estudo é feito por Rudin (1976), por exemplo, em perspectivas ainda mais amplas.

10.1 Várias variáveis ou vetores

Vimos, até aqui, funções de "uma variável":

$$f\colon [2,9] \to \mathbb{R},\ f(x) = 50 - 6x.$$

Ou seja, associamos algum valor $f(x)$ a cada x entre 2 e 9.

Também podemos ter funções de duas (ou várias) variáveis:

$$g\colon [2,9] \times [3,4] \to \mathbb{R},\ g(x,y) = 50 + 4xy - 6x - 2y.$$

Por exemplo, produtividade g depende de:

- número x de operários (entre 2 e 9) *e também de*
- consumo y de energia (entre 3 e 4).

Ambas são *escalares,* isto é, têm valores reais (contradomínio $\mathbb{R}$).

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Também podemos ter funções *vetoriais,* cujos valores pertencem a algum espaço euclideano:

- $\gamma\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, 3t),$$

é uma hélice com duas voltas que sobe 12 unidades;

- $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$A(x,y,z) = (5x - 4yz, 2ye^x - 7z),$$

codifica duas funções escalares de três variáveis.

Então "FUV" eram "funções reais de uma variável real".

Vejamos alguns aspectos operacionais:

Pontos e vetores são as mesmas entidades.
Vetores sem flecha ou negrito.
Indexação usual: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$.
Produto interno: $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.
Norma: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.
Usual: $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e (x,y,z), (u,v,w), (s,t) etc. em vez de (x_1,x_2,x_3).

Os espaços que mais estudaremos são realmente o plano $\mathbb{R}^2$ e o ambiente tridimensional $\mathbb{R}^3$. Entretanto, convém estudar o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ em geral (cuja dimensão é um inteiro positivo n), que é o produto cartesiano de n eixos, ou seja, "cópias da reta real". Toda vez que houver dúvidas, então, concentre-se nos casos particulares bi- e tridimensional: quando se faz um exemplo ou aplicação nesses casos, costuma-se usar coordenadas x, y, z em vez de x_1, x_2, x_3.

A Matemática moderna não destaca os vetores, na escrita, com flecha ou negrito: determinar quem é escalar ou vetor (e em qual dimensão) será tarefa do leitor, a partir do contexto. Também não se distingue entre vetores e pontos, porque as n-uplas coordenadas desempenham ambos os papéis simultaneamente.

Note que, dados n números reais $x_1, \ldots, x_n$, podemos formar o vetor $x = (x_1, \ldots, x_n)$, que é um elemento de $\mathbb{R}^n$. Também, dado $x \in \mathbb{R}^n$, assumiremos

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

automaticamente que x_i é a i-ésima coordenada ou entrada de x. (Alguns autores usam a indexação exponencial x^i, ou talvez até a notação de Einstein $x^i y_i$ para a soma que, aqui, escreveremos $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.)

Lembre, porém, que se pode muito bem indexar vetores e, então, as convenções acima não são rigorosas. Por exemplo, pode-se indicar os vetores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ (da base canônica) como e_1, e_2, e_3: nesse caso, não há nenhum vetor e do qual cada e_i seja uma coordenada (de fato!) e o número e_{ij} é a j-ésima coordenada do vetor e_i, ou seja, é o número $(e_i)_j$.

Finalmente, observe que utilizamos barras duplas $\|\cdot\|$ para a norma do vetor: isso é precisamente o que, em estudos iniciais, chama-se "módulo" do vetor; adotamos novos nome e símbolo para frisar a diferença com escalares em algumas fórmulas; por exemplo, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Para o produto interno, há inúmeras notações em uso; na do slide, temos $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$.

Dentro da reta real, os intervalos foram subconjuntos repetidamente utilizados. No contexto multidimensional, emergem dois objetos com características semelhantes:

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, definimos (figura na lousa):

- o *segmento* entre a e b

$$[a,b] = \left\{ (1-t)a + tb \;\middle|\; t \in [0,1] \right\};$$

- o *paralelepípedo retângulo*

$$[\![a,b]\!] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

(em geral quando cada $a_i < b_i$).

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

10.2 Métrica e topologia

A função $d\colon (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x-y\|$, satisfaz:

- $d(x,y) \geqslant 0$;
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(y,x) = d(x,y)$;
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

É chamada *função distância ou métrica.*

Essa função simplesmente mede a distância entre dois vetores. A última propriedade que listamos é a chamada *desigualdade triangular:* visualize-a no plano, marcando vetores x, y, z como os vértices de um triângulo, medindo seus lados e verificando quais relações essas medidas devem satisfazer para que o triângulo possa ser formado.

De modo análogo à reta real, cada espaço euclideano tem uma estrutura *algébrica,* que descreve como se opera com os vetores — somando-os coordenada por coordenada — e também *analítica e topológica.* Essa parte, que veremos agora, descreve em termos formais o nosso conhecimento já intuitivo sobre aproximações e distâncias.

A distância fundamenta-se na norma e em suas propriedades, que são similares ao do módulo de números reais: para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem sempre $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ e $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$. (Uma demonstração destas propriedades utiliza a própria definição de norma. Verifique, então, que elas podem ser usadas para demonstrar aquelas da distância: para a desigualdade triangular, use $x - z = (x-y) + (y-z)$.)

Sabendo-se comparar vetores, através da noção de distância, os conceitos de limite e continuidade poderão ser formulados de modo idêntico ao usado sobre $\mathbb{R}$. Para ver isso explicitamente, convém reconhecermos algumas entidades:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, defina

$$B(a;r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r \,\}.$$

É a *bola aberta de centro a e raio r.*

Em $n = 2$, é um disco sem sua fronteira.

Em $n = 1$, é o intervalo aberto $]a - r, a + r[$.

Com a noção de "bola" substituindo a de "intervalo", podemos adaptar outros conceitos da reta real para o espaço multidimensional.

Por exemplo, uma *vizinhança* de $a \in \mathbb{R}^n$ é um subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ que contém alguma bola $B(a;\varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. Desse modo, podemos "andar um pouco" em qualquer direção, a partir de a, sem sair de V, o que nos permitirá fazer cálculos no entorno de a. A palavra "vizinhança" é utilizada realmente com seu significado cotidiano: concentramo-nos no que acontece *localmente* em torno de a, não em todo o espaço ou em todo o domínio de uma função.

Com tal conceito de vizinhança, definem-se:

- pontos de acumulação, isolados e interiores;
- conjuntos abertos, fechados, conexos e compactos.

Ou seja: Todas as definições que fizemos em "A Estrutura dos Números Reais", para o espaço $\mathbb{R}$, podem ser feitas analogamente para cada espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, substituindo-se aquele conceito de vizinhança (que exigia a continência de um intervalo aberto) pelo novo conceito (continência de uma bola aberta).

Deixamos essa renovação a seu cargo, assim como uma certificação em livros-texto, enquanto o próximo slide traz a solução a respeito de pontos interiores e conjuntos abertos, com o que mais trabalharemos. Atente para que a maioria das definições, como a de ponto isolado, são idênticas (*mutatis mutandis*) às feitas em $\mathbb{R}$, mas algumas caracterizações não permanecem válidas. Por exemplo, conjuntos compactos são precisamente aqueles simultaneamente fechados e limitados, mas conjuntos conexos podem não ser conexos por caminhos.

Suponha $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$: diz-se que a é *ponto interior* de D se existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subseteq D$.

Um conjunto é *aberto* quando todos os seus pontos são interiores.

Ou seja: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto $\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists r > 0)\, B(x;r) \subseteq A$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Desse modo, um conjunto é vizinhança de cada ponto interior seu, se houver, e um conjunto aberto é vizinhança de todos os seus pontos.

10.3 Limites e continuidade

As noções multidimensionais de limite e continuidade são semelhantes àquelas do Cálculo de uma variável.

Suponha $a \in \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ e $L \in \mathbb{R}^m$.
(a não precisa pertencer a D.)
Suponha que qualquer $B(a;r)$ intersecta $D \setminus \{a\}$, por menor que r seja.
Então: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

(Exemplos de cálculos ao longo dos próximos capítulos.)

Um tal ponto a é chamado *ponto de acumulação* de D.

Essa definição funciona, em particular, para funções $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, que correspondem a sequências de vetores; lembre que o único ponto de acumulação do conjunto $\mathbb{N}$ é o infinito ∞.

Nos espaços $\mathbb{R}^m$ com $m \geqslant 2$, não consideraremos pontos infinitos, ou seja, sempre assumiremos que a é um vetor comum.

Para $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, temos f *contínua em* a se:

- a é pto. isolado de D, *ou*
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Diz-se que f é contínua se o for em todo ponto de D.
(Casos contrários: *descontínua.*)

(Por a "isolado" de D, quer-se dizer isso literalmente, ou seja, existe alguma bola em torno de a de modo que o único ponto de D contido nessa bola é o próprio a, estando todos os outros afastados.)

Várias técnicas que conhecemos para o cálculo de limites e demonstração de continuidade em $\mathbb{R}$ são válidas também no caso vetorial, devidamente

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

adaptadas, mas é preciso atentar que $x \to a$ significa, como veremos na próxima seção, que as coordenadas de x aproximam-se das respectivas coordenadas de a *de todas as formas possíveis.*

Por exemplo, tome

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2},$$

onde x, y são variáveis reais segundo nossa convenção para exemplos. Podemos perguntar se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Aqui, $(x,y) \to (0,0)$ significa que o ponto (x,y) aproxima-se da origem, mas o modo como essa aproximação se dá não é especificada; o valor do limite deverá ser o mesmo para qualquer "jeito" que (x,y) vá a $(0,0)$. Se supusermos que $x \equiv 0$ e $y = t$ com $t \to 0$, temos mesmo $(x,y) \to (0,0)$ e

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0^2}{0^2+t^2} = 0.$$

Porém, se tomarmos ambos $x = y = t$ com $t \to 0$, também $(x,y) \to (0,0)$ e agora

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Assim, devemos concluir que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e que nenhum valor para $f(0,0)$ tornará f contínua na origem.

Fica claro, também, que há inúmeros "modos" de $(x,y) \to (0,0)$, como $x = t^2 + \operatorname{sen} t$ e $y = \exp(-1/|t|)$ com $t \to 0$ e outros. Em geral, é impossível considerar todas as possibilidades para o cálculo do limite.

Veremos, ao longo desta parte "Várias Variáveis", como fazê-lo praticamente.

10.4 Componentes escalares

Daremos maior enfoque às funções escalares de várias variáveis, porque não apenas são mais simples que as vetoriais, mas são também parte do estudo destas. Vejamos o que acontece:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Função $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ origina (e pode ser definida a partir de) *componentes* $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ de modo que

$$f = (f_1, \ldots, f_m).$$

(Diagrama na lousa.)

Exemplo do início:

$$A = (U, V) \text{ com } \begin{cases} U(x, y, z) = 5x - 4yz \\ V(x, y, z) = 2ye^x - 7z \end{cases}$$

Procedimento comum na Matemática é "ponto a ponto":

- somamos vetores coordenada por coordenada;
- comparamos funções escalares em cada ponto do domínio, em separado:
$$g \leqslant h \Leftrightarrow \forall x\, g(x) \leqslant h(x);$$
- agora, estudaremos f separando cada f_i.

Isso significa que podemos estudar uma função observando, em separado, cada uma de suas componentes. Desse modo, para responder a alguma pergunta sobre funções *vetoriais* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — o que é sua integral, sua derivada, etc. —, poderemos antes formular a mesma pergunta sobre funções *escalares* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ainda de várias variáveis. Firmada uma resposta, tentaremos generalizá-la para funções vetoriais pelo método "coordenada a coordenada".

Por exemplo:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall i) \lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i$;
- f é contínua $\Leftrightarrow$ todas as componentes f_i são contínuas;
- integraremos funções vetoriais (1) integrando cada componente e (2) formando um vetor com os resultados.

No caso de limites, certamente a equivalência exige alguma demonstração, porque os conceitos envolvidos foram definidos utilizando-se bolas abertas.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Deixamos a seu cargo pensar a respeito, observando que uma vizinhança de um ponto a contém sempre um paralelepípedo aberto (produto cartesiano de intervalos abertos) que contém a e, reciprocamente, qualquer paralelepípedo desses será, também, uma vizinhança aberta, por conter uma pequena bola aberta centrada em a.

Note bem: Não podemos escrever

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall i, j) \lim_{x_j \to a_j} f_i(x_j) = L_i$$

porque cada f_i tem como argumento um vetor de n variáveis, ou seja, requer a definição de todos $x_1, \ldots, x_n$. A decomposição do limite (e da condição de continuidade) nas componentes é feita sobre o contradomínio apenas, não sobre o domínio. □

10.5 Derivadas parciais

Motivaremos e definiremos várias formas de derivação de funções vetoriais ou com várias variáveis em "Derivação Espacial", mas precisamos antecipar o conceito de derivação parcial para realizarmos cálculos práticos nos próximos capítulos.

Derive quanto a cada variável tratando as outras como constantes. Por exemplo, $f(x, y, z) = x^2 z \operatorname{sen}(x^3 y^4)$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2 \operatorname{sen}(x^3 y^4)$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 z \cos(x^3 y^4) x^3 4y^3$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xz \operatorname{sen}(x^3 y^4) + x^2 z \cos(x^3 y^4) 3x^2 y^4$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 11

Integração Múltipla

Em todo o capítulo, concentramo-nos na integração de funções escalares, porque uma função vetorial $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, deverá ser integrada simplesmente assim:

$$\int_D f(x)\,dx = \left(\int_D f_1(x)\,dx, \ldots, \int_D f_m(x)\,dx \right).$$

11.1 Integral de Riemann

Estudamos as integrais de funções de uma variável em "Integração Definida": definimos um número real correspondente à área compreendida entre o eixo das abscissas, o gráfico da função e as duas retas verticais nos extremos do intervalo de integração.

Nosso propósito agora é o mesmo, no caso de duas variáveis: calcular o volume entre o gráfico de uma função, que agora é uma superfície, e a base plana constituída pelo domínio da função; esse sólido é cilíndrico, delimitado pelas retas verticais que encontram o plano coordenado na fronteira do domínio. Sem dúvida, para mais variáveis, a situação torna-se abstrata e o próprio domínio tem volume.

O procedimento para definir o número correspondente a esse volume também é o mesmo da integração de uma variável, através das somas de Riemann.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assumiremos:

- $D = [\![a, b]\!]$ (com cada $a_i < b_i$) em $\mathbb{R}^n$;
- $f\colon D \to \mathbb{R}$;
- $m, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$(\forall x \in D)\, m < f(x) < M$$

(ou seja, f é limitada).

Motivação: volume entre gráfico de f e hiperplano que contém D.

Note que partições $\mathcal{P}_i$ dos intervalos $[a_i, b_i]$ geram partição $\mathcal{P}$ de D, assim:

$\mathcal{P}$ consiste dos *blocos*

$$B = I_1 \times \ldots \times I_n$$

com cada $I_i \in \mathcal{P}_i$.

(Figura na lousa.)

vol(B) é o produto dos comprimentos dos intervalos!

Assim como para definir integrais definidas de uma variável, usaremos os conceitos de supremo e ínfimo (operadores sup e inf) que apresentamos no Capítulo "A Estrutura dos Números Reais". Novamente, para este uso, pode-se interpretar o supremo (ou ínfimo) de um conjunto de números como o valor máximo (ou mínimo, respectivamente) desses números, com a ressalva de que pode não pertencer ao conjunto. Por exemplo, suponha $f(x) = x^2$: então $\sup_{x\in]3,5]} f(x) = 25$, porque o valor máximo de f nesse intervalo é 25, e $\inf_{x\in]3,5]} f(x) = 9$ embora f não tenha valor mínimo no intervalo, porque cada número nele é ainda maior que algum outro também maior que 3.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Soma inferior

Temos $m \leqslant \inf_{x\in B} f(x) \leqslant M$, então podemos definir:

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{B\in\mathcal{P}} \inf_{x\in B} f(x)\ \mathrm{vol}(B)$$

Integral inferior

Ao refinar-se $\mathcal{P}$, o número $s(f,\mathcal{P})$ cresce, limitado por $M\,\mathrm{vol}(D)$.

Defina:

$$s_D(f) = \sup_{\mathcal{P}\text{ de }D} s(f,\mathcal{P})$$

Soma e integral superiores

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{B\in\mathcal{P}} \sup_{x\in B} f(x)\ \mathrm{vol}(B)$$

$$S_D(f) = \inf_{\mathcal{P}\text{ de }D} S(f,\mathcal{P})$$

Temos $s_D(f) \leqslant S_D(f)$.

Definição

f é *Riemann-integrável sobre* D quando $s_D(F) = S_D(f)$; nesse caso, tal número é escrito

$$\int_D f(x)\,dx$$

(em que o vetor x percorre D).

Exercício

Mostre pela definição que toda função constante é integrável e calcule sua integral sobre D.

Em diversas áreas e por diversos autores, a integral múltipla $\int_D f(x)\,dx$ costuma ser indicada de modos variados. Por exemplo, quando $n = 2$ ou $n = 3$ e D é uma região com área (A) ou volume (V), escreve-se respectivamente

$$\iint_D f(x,y)\,dA \quad \text{ou} \quad \iiint_D f(x,y,z)\,dV.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Muito em breve, integraremos sobre regiões outras que paralelepípedos retângulos. No caso de um domínio limitado D, basta arranjar um paralelepípedo D_0 que contenha D e estender f a uma função $f_0 \colon D_0 \to \mathbb{R}$ com $f_0|_{D_0 \setminus D} = 0$.

Os fatos a seguir e suas demonstrações são análogos àqueles da integração de Riemann de funções de uma variável; é recomendável rever aquelas demonstrações tendo-se em mente o cenário de várias variáveis:

Valem as mesmas regras:

- linearidade;
- dominância e controle;
- se $D = D_1 \cup \ldots \cup D_K$ dois a dois disjuntos e cada $f|_{D_k}$ integrável, então f integrável e

$$\int_D f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} \int_{D_k} f(x)\,dx.$$

Na última propriedade, é importante exigir integrabilidade em cada subdomínio D_k, para garantir que eles são suficientemente "razoáveis", de modo que χ_{D_k} seja integrável também.

Discussão extraordinária: O critério de Lebesgue, que determina se uma função é integrável ou não, tem enunciado para funções de várias variáveis idêntico àquele que estudamos na página 226. De fato, seja $Z_f = \{\, x \in D \mid f$ é descontínua em $x \,\}$. Então f é Riemann-integrável se e somente se X_f tem medida zero, isto é:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists D_0, D_1, D_2, \ldots)\, X_f \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{vol}(D_k) \leqslant \varepsilon.$$

A modificação necessária é que cada D_k deve ser um paralelepípedo retângulo.

Novamente, portanto, toda função contínua ou contínua por partes é integrável. No contexto de várias variáveis, a continuidade por partes significa que as fronteiras entre essas partes têm medida zero, especialmente segmentos de reta (em duas variáveis) ou hiperplanos (em mais variáveis).

Como a integração de uma variável é caso particular da que desenvolvemos aqui, os exemplos de funções integráveis ou não-integráveis que já conhecemos permanecem válidos no novo contexto. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

11.2 Cálculo da integral múltipla

Fubini

Se f é contínua (outras condições podem ser usadas), então:

$$\int_{[\![a,b]\!]} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$

Integrais iteradas são de uma variável: comece por dentro, tratando outras variáveis como constantes. (Mesmo princípio da derivação parcial.)

Podemos mudar a ordem das variáveis para simplificar o cálculo.

Para domínios que são paralelepípedos retângulos, basta realmente mudar a sequência das integrais a calcular, preservando-se a correspondência entre variáveis x_i e limites de integração $[a_i, b_i]$. Isso é consequência do próprio Teorema de Fubini, porque o valor da integral múltipla é sempre o mesmo. Para domínios que não são paralelepípedos, veremos em exemplos quais são os cuidados necessários.

Alguns livros trazem esta notação para a mesma integral acima:

$$\int_{a_n}^{b_n} dx_n \dots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} dx_1\, f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Em cada etapa do cálculo, a variável com respeito à qual se integrou deve desaparecer, do mesmo modo que na integração de funções de uma variável.

Exemplo

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} (x^3y^2 - 5y)\,dx\,dy = \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{x^4}{4}y^2 - 5yx\Big]_{x=0}^{x=2} dy = \\
&= \int_{-1}^{1} (4y^2 - 10y)\,dy = \\
&= \Big[4\frac{y^3}{3} - 10\frac{y^2}{2}\Big]_{y=-1}^{y=1} = \tfrac{8}{3}
\end{aligned}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]} x\cos(xy)\,d(x,y)$$

Primeira opção:

$$\int_0^1 \underbrace{\int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dx}_{\text{requer integração por partes!}}\,dy$$

Segunda opção:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 x\cos(xy)\,dy\,dx &= \\ &= \int_0^{\pi/2} x\int_0^1 \cos(xy)\,dy\,dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} x\left[\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 1\end{aligned}$$

Exercício (Demidovitch 2113)

Calcule

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} (x^2+2y)\,d(x,y)$$

de dois modos.[a]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Calcule cada integral usando todas as ordens possíveis:

- $\displaystyle\int_{[0,2]\times[-1,1]} 6x^2y^3\,d(x,y)$;[b]
- $\displaystyle\int_{[-1,1]\times[0,2]} 6x^2y^3\,d(x,y)$;[c]
- $\displaystyle\int_{[1,4]\times[2,3]} (y-x)^{80}\,d(x,y)$;[d]
- $\displaystyle\int_{[-2,2]\times[0,1]\times[0,\pi]} x^2e^y \operatorname{sen} z\,d(x,y,z)$;[e]

Até aqui, integramos somente sobre domínios que são paralelepípedos retângulos; passaremos a considerar outros domínios.

Outro modo de visualizar uma integral dupla (quando $n=2$) é através do cálculo do volume de um sólido seccionado: integramos, sobre x, uma área que depende de x e, agora, dada também por uma integral, cuja variável é y e varia entre limites que podem depender de x.

Domínios que não são paralelepípedos

(Demidovitch 2116)

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx &= \\ &= \int_1^2 x^2\int_{1/x}^{x} y^{-2}\,dy\,dx = \\ &= \int_1^2 x^2[-y^{-1}]_{y=1/x}^{y=x}\,dx = \\ &= \int_1^2(-x+x^3)\,dx = \\ &= \Big[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\Big]_{x=1}^{x=2} = \tfrac{9}{4}\end{aligned}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Calcule:

- (Demidovitch 2119) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{3\cos\varphi} r^2 \operatorname{sen}^2\varphi\, dr\, d\varphi$;[a]
- (Demidovitch 2120) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy\, dx$.[b]

Sobre paralelepípedos retângulos, o Teorema de Fubini permitia-nos tomar a ordem de integração mais favorável em vista do integrando. No caso dos domínios irregulares, como os limites de integração trazem funções das variáveis e não podem ser deslocados (ou a variável não desaparece após sua integração), é preciso reescrever o domínio na nova perspectiva:

Mudança de ordem

$$\int_0^1\int_x^1 \exp(y^2)\, dy\, dx$$

Note que $\exp(y^2)$ não tem primitiva elementar (quanto a y).

Para mudar a ordem, é preciso esquematizar o domínio!
(Figura na lousa.)

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{cases}$$

Desse modo, $\exp(y^2)$ é constante quanto a x:

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^y \exp(y^2)\, dx\, dy &= \\ &= \int_0^1 \exp(y^2) \int_0^y dx\, dy = \\ &= \int_0^1 \exp(y^2) y\, dy = \tfrac{1}{2}(e-1) \end{aligned}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplos

(Demidovitch 2136) Mudar a ordem de

$$\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

(Figura na lousa.) A região é dada por:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 3x^2 \leqslant y \leqslant 12x \end{cases}$$

Limitada pelas curvas $y = 12x$ e $y = 3x^2$, ou seja, $x = y/12$ e $x = \sqrt{y/3}$, donde:

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 48 \\ \frac{y}{12} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{y}{3}} \end{cases}$$

Portanto:

$$\int_0^{48} \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Lembre que, formalmente, isso é $\int_{\text{hachurado}} f(x,y)\,d(x,y)$.

(Demidovitch 2142) Mudar a ordem de

$$\int_0^1 \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Na lousa.) Solução:

$$\underbrace{\int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{1/2}^{\sqrt{2}} \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx}_{\text{(II)}} + \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx}_{\text{(III)}}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Suponha $a, b, k \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $k > 0$. Suponha $\varphi\colon [a,b] \to [0,k]$ integrável. (Figura na lousa.)

Sabemos que a área sob o gráfico de φ é dada por:

- $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ (usando $n = 1$);
- $\int_H 1\,d(x,y)$ (usando $n = 2$).

Mostre algebricamente que os dois valores são iguais; mostre que uma ordem de integração é ruim.[a]

Exercício

Mude a ordem de integração:

- $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{3x} f(x,y)\,dy\,dx$;[a]
- $\displaystyle\int_6^9 \int_0^{x/3} f(x,y)\,dy\,dx$.[b]

Integração imprópria: Os cuidados que tomamos em "Uma Variável" com o Teorema Fundamental do Cálculo também devem ser observados ao operar-se com o Teorema de Fubini. Por exemplo, calcular apressadamente

$$\int_{[1,4]\times[2,3]} \frac{d(x,y)}{(x-y)^2}$$

conduz incorretamente ao resultado negativo $-2\ln 2$, porque o integrando é positivo.

De fato, em vista da descontinuidade do integrando em toda a reta $y = x$, é preciso recorrer-se a integrais impróprias:

$$\int_2^3 \int_1^4 (x-y)^{-2}\,dx\,dy = \int_2^3 \left(\int_1^y (x-y)^{-2}\,dx + \int_y^4 (x-y)^{-2}\,dx \right) dy =$$
$$= \int_2^3 \left(\lim_{x\to y^-} \frac{(x-y)^{-1}}{-1} - \frac{(1-y)^{-1}}{-1} + \frac{(4-y)^{-1}}{-1} - \lim_{x\to y^+} \frac{(x-y)^{-1}}{-1} \right) dy.$$

Os limites valem ∞ e $-\infty$ respectivamente, enquanto as duas outras expressões de y são funções limitadas em $[2,3]$; com os sinais envolvidos, o integrando e a própria integral valem ∞.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A outra ordem de integração produz o mesmo resultado. Para implementá-la, considere que a descontinuidade ocorre para cada valor de x entre 2 e 3, enquanto "percorre" o intervalo $[1, 4]$. A decomposição da integral fica assim, em que omitimos o integrando $(x-y)^{-2}$ e as diferenciais:

$$\int_{x=1}^{4}\int_{y=2}^{3} = \int_{x=1}^{2}\int_{y=2}^{3} + \int_{x=2}^{3}\left(\int_{y=2}^{x} + \int_{y=x}^{3}\right) + \int_{x=3}^{4}\int_{y=2}^{3}. \qquad \square$$

11.3 Duas aplicações

Além de calcular volumes, como as definimos, as integrais múltiplas são a expressão natural de outras quantidades nas ciências e engenharias. Aqui, apresentaremos as fórmulas e suas motivações para calcularmos áreas de superfícies e centros de massa.

Área de superfície

Situação $D \subseteq \mathbb{R}^2$; use $(x, y) \in D$.
(Figura na lousa.)

- Volume do cilindro: $\int_D f(x,y)\, d(x,y)$.
- Área da base (D): $\int_D 1\, d(x,y)$.
- Área do topo (a tampa)?

$$\int_D \left(1 + (\tfrac{\partial f}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial f}{\partial y})^2\right)^{1/2} d(x,y)$$

Essa tampa é o gráfico de f:

$$\mathrm{Gr}(f) = \left\{ \big(x, y, f(x,y)\big) \;\middle|\; (x,y) \in D \right\}$$

Dedução: A expressão para a área do gráfico não é intuitivamente imediata, mas pode ser obtida pelo raciocínio a seguir, que, por sua vez, pode ser transformado em demonstração pelo princípio habitual de limitar o erro cometido e invocar continuidade na forma ε-δ.

Começamos trabalhando com o caso especial em que D é um retângulo alinhado com os eixos coordenados: Suponha $D = [x, x+h] \times [y, y+k]$. Então $\mathrm{Gr}(f)$ é aproximadamente o paralelogramo formado por estes vetores:

$$X = \big(h, 0, f(x+h, y) - f(x,y)\big),$$
$$Y = \big(0, k, f(x, y+k) - f(x,y)\big).$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fatore h, k e tome diferenciais:

$$X = dx\,(1, 0, \tfrac{\partial f}{\partial x}),$$
$$Y = dy\,(0, 1, \tfrac{\partial f}{\partial y}).$$

Lembre, por exemplo, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Omitimos o ponto (x, y) junto à notação da derivada parcial.

A área do paralelogramo é a norma do produto vetorial $X \wedge Y$:

$$X \wedge Y = dx\,dy \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = dx\,dy\,(-\tfrac{\partial f}{\partial x}, -\tfrac{\partial f}{\partial y}, 1),$$

donde

$$\operatorname{area} \operatorname{Gr}(f) \approx \|X \wedge Y\|.$$

Para qualquer D, basta integrar o "elemento de área". □

Exemplo

Calcule a área do plano $z = 3x + 2y$ delimitado por $0 \leqslant x \leqslant 2$ e $0 \leqslant y \leqslant x$.

(Figura na lousa.) Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$, donde

$$\int_0^2 \int_0^x (1 + 3^2 + 2^2)^{1/2}\,dy\,dx = \sqrt{14} \int_0^2 x\,dx = 2\sqrt{14}.$$

Exercício

Calcule a área da elipse (secção cilíndrica) $z = 12 + 5x - 3y$ sobre o disco $D = \{\,(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 5\,\}$.[a]

Centro de massa

Situação $D \subseteq \mathbb{R}^3$; use $(x, y, z) \in D$.

D delimita um sólido cuja densidade pontual é dada por $f > 0$.

Massa do sólido: $M = \int_D f(x, y, z)\,d(x, y, z)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Média ponderada de cada eixo:

- $x_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_D x\, f(x,y,z)\, d(x,y,z)$;
- $y_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_D y\, f(x,y,z)\, d(x,y,z)$;
- $z_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_D z\, f(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

O centro de massa do sólido é $(x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}})$.

Idéia para mostrar: Pontos $P_1, \ldots, P_N$ com massas $m_1, \ldots, m_N$.
Média ponderada (operação com vetores):

$$\frac{\sum_{i=1}^N m_i P_i}{\sum_{i=1}^N m_i};$$

é o ponto que equilibra $P_1, \ldots, P_N$.

Para aplicar esse princípio a um sólido, fatiamos a região que ocupa no espaço tridimensional em pequenos "cubinhos" e substituímos cada um por um ponto material com mesmas coordenadas e massa:

Cubinho $[x, x+h] \times [y, y+k] \times [z, z+l]$:

- massa aproximada: $f(x,y,z)\, hkl$;
- coordenadas aprox.: (x,y,z).

Tome diferenciais e integre:

$$\frac{\int_D \big(f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz\big) \cdot (x,y,z)}{\int_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz} = (x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}}).$$

A integral do numerador é uma função vetorial, que calculamos componente a componente.

11.4 Mudança de coordenadas

Veremos, primeiramente, o que são mudanças de coordenadas, o teorema que relaciona as integrais feitas nos dois sistemas e como funciona o jacobiano, que é seu elemento central. Então, poderemos exemplificar como essas

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

mudanças facilitam a compreensão e o cálculo de integrais utilizando-se o teorema. Descreveremos, depois, a função de mudança de variáveis e seu jacobiano para algumas mudanças de variável mais cotidianas.

Assuma:

- $D, C \subseteq \mathbb{R}^n$ razoáveis;
- $f\colon D \to \mathbb{R}$ contínua;
- $\Phi\colon C \to D$ bijetora, com $\Phi(u) = x$ e cada $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$ contínua.

(Diagrama na lousa.)

Note que ambos D, C são subconjuntos do mesmo espaço euclideano, com a mesma dimensão n.

Assim, a função vetorial Φ tem n componentes, cada uma função escalar que pode ser derivada com respeito a cada uma de suas n variáveis.

Jacobiano:

$$J_\Phi = \det\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\right]_{i,j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Note: J_Φ é função contínua de u.

Notações comuns para o jacobiano são $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, mas não podem ser manipuladas como derivadas parciais!

Teorema

Se também $J_\Phi(u) \neq 0$ para todo $u \in C$, então

$$\int_D f(x)\,dx = \int_C f(\Phi(u))\,|J_\Phi(u)|\,du.$$

(Não esqueça o módulo do determinante.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Origem do jacobiano: Para justificar a inclusão do módulo do jacobiano como um "fator de correção" na nova integral, faremos um raciocínio semelhante àquele em que motivamos a fórmula para a área da superfície, mas com uma apresentação diferente.

Trabalharemos com $n = 3$ e uma função $\Phi(x, y, z)$ e entenderemos a integral de f sobre D como o cálculo da massa de um sólido cuja densidade é dada pontualmente por f. A composição $f \circ \Phi$ denota a densidade para a nova integral, mas devemos considerar também se o sólido sofre alterações de forma.

Primeiramente, substituímos Φ por sua melhor aproximação linear em um ponto (a, b, c). Essa nova função $L(x, y, z)$ tem o mesmo papel das melhores aproximações lineares que estudamos em "Derivação", para funções reais de uma variável, e provaremos em "Derivação Espacial" que ela é dada por

$$L(x,y,z) = \Phi(a,b,c) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix},$$

com as derivadas parciais calculadas no ponto (a, b, c).

Consideremos o que acontece com o cubo de volume 1 definido pelos quatro vértices

$$(a,b,c),\ (a+1,b,c),\ (a,b+1,c),\ (a,b,c+1).$$

Ele é levado por Φ a um sólido que aproximaremos como sendo o paralelepípedo de vértices

$$L(a,b,c),\ L(a+1,b,c),\ L(a,b+1,c),\ L(a,b,c+1);$$

seus lados são os vetores

$$\begin{aligned} X &= L(a+1,b,c) - L(a,b,c) = (\tfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \tfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \tfrac{\partial \Phi_3}{\partial x}), \\ Y &= L(a,b+1,c) - L(a,b,c) = (\tfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \tfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \tfrac{\partial \Phi_3}{\partial y}), \\ Z &= L(a,b,c+1) - L(a,b,c) = (\tfrac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \tfrac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \tfrac{\partial \Phi_3}{\partial z}), \end{aligned}$$

também com as derivadas parciais calculadas em (a, b, c).

O novo "fator de correção" é o volume desse paralelepípedo, que é dado pelo módulo do produto misto $\langle X, Y \wedge Z \rangle$, mas

$$\langle X, Y \wedge Z \rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J_\Phi(a,b,c). \qquad \square$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Vejamos alguns exemplos de mudança de coordenadas para facilitar a integração, seja com domínio intrincado ou função complicada, e como se calcula o jacobiano:

Exemplo clássico

Calcular a área da elipse $D\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ onde $a, b > 0$. (Figura na lousa.)

Usemos

$$\Phi\colon \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{para } 0 \leqslant \theta < 2\pi \text{ e } 0 < r \leqslant 1.$$

Primeiro, calculemos o jacobiano:

$$J_\Phi = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix}}_{\text{convém escrever!}} = \begin{vmatrix} -ar\operatorname{sen}\theta & a\cos\theta \\ br\cos\theta & b\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -abr,$$

donde $|J_\Phi| = abr$ e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$.

Desse modo,

$$C\colon \begin{cases} 0 \leqslant \theta < 2\pi \\ 0 < r \leqslant 1 \end{cases}$$

(a origem não faz falta na área da elipse) e a área é

$$\int_D 1\, d(x,y) = \int_C 1\, |J_\Phi|\, d(\theta, r) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr\, dr\, d\theta = \pi ab.$$

Exemplo na lousa

Calcular

$$\int_D \Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)^4 d(x,y)$$

sobre o triângulo

$$D\colon \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \end{cases}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Os exercícios pertinentes a este assunto pedem o cálculo de integrais sobre domínios cuja configuração é difícil de trabalhar no sistema de coordenadas original, ou de funções cujas expressões podem ser simplificadas por mudança de variáveis.

Coordenadas polares

(Figuras na lousa, $n = 2$.)

$$\Phi\colon \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{para } 0 \leqslant \theta < 2\pi \text{ e } r > 0.$$

(A origem não faz falta na integração.)

Então

$$J_\Phi = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix}}_{\text{convém escrever!}} = \begin{vmatrix} -r\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -r < 0$$

e $|J_\Phi| = r$.

Coordenadas cilíndricas (exercício)

(Figura na lousa, $n = 3$.)

$$\Phi\colon \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = h \end{cases} \quad \text{para } 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ r > 0 \text{ e } h \text{ qualquer.}$$

Determine J_Φ e seu módulo.[a]

(O eixo Oz não faz falta na integração.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Coordenadas esféricas (exercício)

(Figura na lousa, $n = 3$.)

$$\Phi\colon \begin{cases} x = r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{para } 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \text{ e } r > 0.$$

Mostre que $|J_\Phi| = r^2\operatorname{sen}\varphi$.[b]

(O eixo Oz não faz falta na integração.)

No sistema proposto, θ mede "longitude" e φ mede "colatitude". Há várias possibilidades para os intervalos a que θ e φ pertencerão, assim como sistemas em que φ é tomado como outro ângulo, de "latitude". Essas variantes alteram a expressão do jacobiano e/ou de seu valor absoluto.

Rotação no plano (exercício)

Dois sistemas de coordenadas retangulares (u, v), (x, y) com mesmas escalas e origem, com ângulo α de x a u. (Figura na lousa.)

Mostre que

$$\Phi\colon \begin{cases} x = u\cos\alpha - v\operatorname{sen}\alpha \\ y = u\operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha \end{cases}$$

e que $|J_\Phi| = 1$.[a]

Translação (exercício)

Dois sistemas de coordenadas retangulares (u, v), (x, y) com mesmas escalas e origem, com

$$\Phi\colon \begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}.$$

Mostre que $J_\Phi = 1$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Capítulo 12

Derivação Espacial

Este é o primeiro de três capítulos que tratam ou usam a derivação de funções escalares ou vetoriais de uma ou várias variáveis.

É costume requerer que curvas e superfícies sejam dadas por funções contínuas ou mesmo diferenciáveis; tal hipótese poderá ser feita assim que definirmos funções de classe C^k (na pág. 326). Agora, importam apenas os cálculos que podemos fazer e que já assumem, por exemplo, a existência das derivadas em questão, como γ' na primeira seção.

12.1 Curvas

Intuitivamente, pensamos em curvas como linhas em um espaço euclideano, originadas por segmentos de retas que se "curvam" como barbantes, o que leva à tentação de defini-las como conjuntos de pontos. A abordagem que adotaremos e bastante comum, porém, vê as curvas precisamente como as funções que "transportam" os segmentos de reta para dentro do espaço euclideano e alteram sua forma, não apenas como suas imagens.

Desse modo, o intervalo I é visto como um barbante esticado na reta real e sua imagem corresponde ao barbante enrolado e solto dentro do espaço. A função γ preserva a correspondência entre os pontos nas duas versões do barbante.

> Seja I intervalo fechado de $\mathbb{R}$.
> $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ é uma *curva.*

Essa é a definição de *curva parametrizada,* ou seja, $t \in I$ é um *parâmetro* e $\gamma(t)$ é o ponto da curva designado por esse parâmetro. Por exemplo, se γ

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

descreve a trajetória de um ponto no espaço, podemos ter t como um instante de tempo qualquer e $\gamma(t)$ a posição desse ponto no instante t. Note que γ é uma função vetorial de uma variável escalar. Geralmente se exige que γ seja contínua.

Reveja, em Geometria Analítica, as diversas formas de "equação paramétrica" de uma reta no plano ou no espaço. Quais semelhanças você nota?

Para $t \in I$, quando existe

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\overbrace{\gamma(t+h)-\gamma(t)}^{\text{deslocamento em } \mathbb{R}^m}}{h \text{ (escalar)}}}_{\substack{\text{velocidade vetorial} \\ \text{média de } t \text{ a } t+h}},$$

diz-se que γ é *derivável* em t.

Derivável se o for em todo $t \in I$.

Como qualquer função vetorial, γ tem componentes $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ com cada $\gamma_i \colon I \to \mathbb{R}$ informando qual é a i-ésima coordenada de $\gamma(t)$ em cada instante $t \in I$. Já que subtração, limite e divisão por h podem ser expressos "coordenada a coordenada", eis aqui a manifestação desse fenômeno em termos da derivada:

Nesse caso,

$$\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_m'(t)\big).$$

Essa é a velocidade vetorial e vetor tangente em t.

A velocidade escalar é

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \ldots + (\gamma_m'(t))^2}.$$

De posse das definições, recordamos que, como cada componente é uma função real de uma variável, sua derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico em cada ponto. Isso acontecendo em cada projeção da curva, concluímos que a velocidade vetorial $\gamma'(t)$ é um vetor que, com base no ponto $\gamma(t)$, tangencia a curva γ.

Portanto, emergem naturalmente os próximos dois resultados: o comprimento da curva é a integral de sua velocidade escalar; a reta tangente à curva pode ser determinada por uma equação vetorial, dados o ponto e o vetor-direção.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

O *comprimento* de γ é

$$\int_I \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

A *reta tangente* a γ no ponto $\gamma(t_0)$ é (parametricamente):

$$x = \underbrace{\gamma(t_0)}_{\text{ponto}} + \lambda \underbrace{\gamma'(t_0)}_{\text{direção}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

(Diagrama na lousa.)

Esse comprimento iguala a *distância percorrida* por um ponto material com posição $\gamma(t)$ no instante t, que possivelmente tem sobreposições ou voltas por sobre a própria imagem da curva.

Exercício: O gráfico de uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ pode ser entendido como uma curva plana $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$. Mostre que as deduções acima para o comprimento e a reta tangente coincidem com aquelas que aprendemos em "Uma Variável", respectivamente, $\int_I \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$ e $L(t) = f(a) + f'(a)\cdot(t-a)$. □

Exemplo

A reta $\gamma(t) = (4t^2, 1 - 3t^2, 7)$ para $t \in [0, 2]$:

- $\gamma'(t) = (8t, -6t, 0)$;
- $\|\gamma'(t)\| = 10t$;
- comprimento $\int_0^2 10t\,dt = 20$;
- tangente em $\gamma(1) = (4, -2, 7)$

$$(x, y, z) = (4, -2, 7) + \lambda(8, -6, 0) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Essa é uma reta percorrida aceleradamente em termos do parâmetro t:

$$(4\mu, 1 - 3\mu, 7) \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

(Faça $\mu = 1+2\lambda$ para obter a forma no slide.) Se a compararmos com uma rodovia retilínea, notamos que seu comprimento 20 não é numericamente igual à "duração da viagem" que é o comprimento 2 do intervalo a que pertence t.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Evidentemente, a reta tangente a um segmento de reta, em qualquer ponto seu, deve ser a própria reta desse segmento. A parametrização obtida, portanto, informa outra representação do segmento quando $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (esses limites podem ser encontrados por inspeção) e reescreve-se assim:

$$\begin{cases} x = 4 + 8\lambda, \\ y = -2 - 6\lambda, \\ z = 7. \end{cases}$$

Isolando λ, obtemos a equação na forma simétrica:

$$\frac{x-4}{8} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-7}{0}$$

(a divisão por 0 é apenas notacional e as multiplicações "em cruz" permanecem corretas).

Parametrização importante

Circunferência de raio 1 e centro na origem:

- $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $(t \in [0, 2\pi])$, ou
- $(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ para $(t \in [0, 1])$.

Imagem:

$$S^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}.$$

A mais tradicional parametrização da circunferência e, por isso, chamada "canônica" ou "usual" é

$$(a + r\cos t, b + r \operatorname{sen} t) \quad (t \in [0, 2\pi]),$$

onde r, a, b são constantes indicando o raio e o centro da curva. Note que os pontos inicial e final dessa curva são o mesmo $(a, 0)$. Pode-se também mover a constante 2π para o ângulo de rotação.

Na teoria matemática, é ubíquo o "círculo de raio 1 e centro na origem" denotado S^1, para que toda função contínua $S^1 \to \mathbb{R}^n$ seja entendida como um círculo, por mais deformado e distorcido que seja, talvez até preenchendo todo um cubo!

Essa, porém, não é a única parametrização possível. Em computação gráfica ou outras aplicações, pode-se preferir uma parametrização racional,

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

isto é, cujas componentes sejam funções racionais mais fáceis de calcular que as trigonométricas usuais. Ei-la:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \quad (t \in [-\infty, \infty]),$$

onde o único ponto que não é descrito por parâmetro real é o inicial/final $(-1, 0)$.[a] Verifique formalmente (ou visualmente em um computador) que essa parametrização realmente descreve S^1.

As outras seções cônicas também admitem parametrizações racionais; um modo de obtê-las é compondo a parametrização acima com funções simples de subdomínios de S^1 às curvas em questão.

Exemplo

A hélice $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, 10t)$ para $t \in [-1, 1]$ (diagrama na lousa):

- $\gamma'(t) = (-2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t, 10)$;
- $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\pi^2 + 100} = 2\sqrt{25 + \pi^2}$;

- comprimento $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{25+\pi^2}\, dt = 4\sqrt{25+\pi^2}$;
- tangente em $\gamma(0)$

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 2\pi, 10) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Exercício

Sendo

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi e^t), \operatorname{sen}(2\pi e^t), e^t) \quad (t \in [-2, 2]),$$

calcule o comprimento de γ e as tangentes em $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$.[a]

A seguir, listamos algumas regras da derivação quanto às operações possíveis entre curvas. "Somar" ou "multiplicar" curvas não são atividades cotidianas, mas as operações de fato existem porque as funções correspondentes são vetoriais e (tendo o mesmo domínio e o mesmo número de componentes) podem ser somadas ou multiplicadas instante a instante. Já utilizar uma função escalar para multiplicar uma curva é espichá-la ou contraí-la, em relação à origem, por um fator variante.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Para $\gamma, \delta\colon I \to \mathbb{R}^m$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$, valem:

- $(\gamma \pm \delta)' = \gamma' \pm \delta'$;
- $(f \cdot \gamma)' = (f' \cdot \gamma) + (f \cdot \gamma')$;
- $\langle \gamma | \delta \rangle' = \langle \gamma' | \delta \rangle + \langle \gamma | \delta' \rangle$;
- $(\gamma \wedge \delta)' = \gamma' \wedge \delta + \gamma \wedge \delta'$ se $m = 3$.

Em suma, valem as regras de derivação para soma e para diversos produtos (respectivamente: por uma função escalar, interno e vetorial), como estudamos em "Derivação" para funções de uma variável, interpretando-se os produtos convenientemente. Você pode demonstrar essas propriedades diretamente, mas note que também se pode mostrá-las calculando-se coordenada a coordenada e aplicando-se as regras já conhecidas a cada componente!

Também valem as simplificações usuais, correspondentes a combinações lineares: se $\gamma_i\colon I \to \mathbb{R}^m$ e $c_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, então

$$(c_1\gamma_1 \pm \ldots \pm c_k\gamma_k)' = c_1\gamma_1' \pm \ldots \pm c_k\gamma_k'.$$

Ainda mais, se $v \in \mathbb{R}^m$ é um ponto fixo e a curva γ satisfaz $\gamma(t) = v$ para todo $t \in I$, então $\gamma' = 0$.

Para o produto vetorial, restringimo-nos ao caso $m = 3$. Em geral, o produto vetorial sobre $\mathbb{R}^m$ é calculado com $m-1$ vetores; a fórmula de derivação de um produto arbitrário deverá ter sua correspondente aqui também.

Exercício
Suponha que $\|\gamma(t)\| \equiv K$ constante. Mostre que γ e γ' são sempre ortogonais.
Dica: derive $\langle \gamma(t) | \gamma(t) \rangle \equiv K^2$.

Nesse exercício, a hipótese $\|\gamma(t)\| \equiv K$ significa simplesmente que γ tem sua imagem (a curva como conjunto de pontos) contida na superfície de uma esfera de raio K centrada na origem. A tese pode ser visualizada assim: em cada instante t, a posição $\gamma(t)$ é um raio vetor com base na origem e extremidade na superfície esférica, enquanto que $\gamma'(t)$ tem base na superfície e é tangente a ela, daí a ortogonalidade. O exercício pede por uma demonstração algébrica e formal disso.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

12.2 Superfícies

De modo análogo ao que fizemos com curvas, trataremos as superfícies como funções de um subconjunto do plano ao espaço com mais dimensões. Podemos visualizar a definição abaixo tomando K como uma folha de papel posicionada no plano e depois torcida ou amassada dentro de um espaço, sendo σ a correspondência entre os pontos nas duas versões da folha.

Seja $K = S \times I$ retângulo fechado de $\mathbb{R}^2$.
$\sigma\colon K \to \mathbb{R}^m$ é uma *superfície.*
(Diagrama na lousa.)

Nosso objetivo é repetir, para superfícies, o que estudamos para curvas. (Novamente, omitimos requerimentos sobre continuidade ou diferenciabilidade.)

Atenção
Aqui, σ vetorial *parametriza* uma superfície, ou seja, sua imagem

$$\mathrm{Im}(\sigma) = \{\, \sigma(s,t) \mid (s,t) \in K \,\}$$

forma a superfície.
Antes, o gráfico de uma função escalar f era a superfície:

$$\mathrm{Gr}(f) = \{\, (x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D \,\}.$$

(Diagrama na lousa.)

Trabalhamos com gráficos, majoritariamente, em "Integração Múltipla": na maior parte daquele contexto, f era uma função escalar. Aqui, σ é vetorial.

Exemplo
O toro $\sigma\colon [0,2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $R > r$ e

$$\sigma(s,t) = (R + r\cos t)(\cos s, \operatorname{sen} s, 0) + r(0,0,\operatorname{sen} t).$$

(Figura na lousa.)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Para obter essa parametrização,começamos com a circunferência que percorre o interior do toro, que tem raio R e está contida no plano Oxy: é $(R\cos s, R\operatorname{sen} s, 0)$ para $s \in [0, 2\pi]$. No ângulo s fixado, a seção radial do toro é outra circunferência, contida no plano gerado pelo vetor radial $\vec{u} = (\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$ e o vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$ do eixo Oz, então é parametrizada por $(r\cos t)\vec{u} + (r\operatorname{sen} t)\vec{k}$ a partir do ponto na circunferência central do toro. Portanto, somando ambas as parametrizações, obtemos o ponto na superfície:

$$(R\cos s, R\operatorname{sen} s, 0) + (r\cos s\cos t, r\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t, r\operatorname{sen} t).$$

(Figurão na lousa.) Fixe o primeiro parâmetro $s \in S$:

$$\gamma_s \colon I \to \mathbb{R}^m,\ \gamma_s(t) = \sigma(s,t),$$

é uma curva. Estudaremos

$$\gamma_s'(t) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}(\sigma(s, t+h) - \sigma(s,t)).$$

Analogamente, para cada $t \in I$:

$$\delta_t \colon S \to \mathbb{R}^m,\ \delta_t(s) = \sigma(s,t),$$

é uma curva. Estudaremos

$$\delta_t'(s) = \lim_{k\to 0} \tfrac{1}{k}(\sigma(s+k, t) - \sigma(s,t)).$$

Perguntas:

- Modos de descrever o plano tangente?
- Outros vetores tangentes?
- Derivar quanto a s, t simultaneamente?

Para isso, definiremos material novo.

Como para curvas, trataremos cada componente separadamente: novamente suporemos $f \colon D \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

12.3 Derivadas parciais

Suponha $f\colon D \to \mathbb{R}$ e a pto. interior de $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Para $1 \leqslant i \leqslant n$, defina

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h}.$$

(Isso é $\frac{df}{dx}(a)$ quando $n = 1$.)

Alguns livros utilizam notações diferentes para a derivada parcial, como $f_{x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$, se o uso é intenso ou se as expressões trabalhadas são muito complexas.

Dê preferência, porém, à notação fracionária, utilizando o símbolo ∂ (lê-se "del"), porque diferentes autores utilizando a notação indexada com significados variados e conflitantes.

Apenas i-ésima coordenada tem incremento h.
Então $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é calculado como em FUV, mantendo x_j $(j \neq i)$ constantes.

Em outras palavras, tanto a definição de derivada parcial (via limite) como as regras para seu cálculo são as mesmas da derivada que conhecemos para funções de uma variável porque se trata, de fato, de uma tal função: excetuando-se a_i, as entradas de a são todas mantidas constantes e servem como parâmetros para definirmos a função real

$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

que será derivada exatamente como já aprendemos.

Exemplo
$f(x, y) = 2xy - xe^{xy}$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y - (1e^{xy} + xe^{xy}y)$, donde
- $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 0) = 2.0 - (e^{3.0} + 3e^{3.0}0) = -1$;
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - xe^{xy}x = 2x - x^2e^{xy}$, donde
- $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 0) = 2.3 - 3e^{3.0}3 = -3$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assim como para a derivação comum, cometem-se abusos de notação e linguagem em nome da simplicidade das expressões trabalhadas. Escreve-se $\frac{\partial f}{\partial x}$, mas isso é uma função $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ em que as variáveis x, y assumem valores como $3, 0$, respectivamente, no slide, enquanto a letra x no denominador não é a variável em si, apenas uma marca de que a função foi derivada com respeito a essa variável.

Exercício
Calcule as derivadas parciais de $f(x, y, z) = xz\,\mathrm{sen}(yz)$ e seus valores em $(1, 2, \pi)$.[a]

Também as diversas técnicas que aprendemos em FUV podem ser aplicadas a derivadas parciais:

Exemplo
Suponha $\cos(x + f(x, y, z)) = x^2y^3z^4$.
Aplique $\frac{\partial}{\partial x}$ aos dois lados:

$$-\,\mathrm{sen}(x + f(x, y, z)) \cdot [1 + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)] = 2xy^3z^4.$$

Isole $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{2xy^3z^4}{\mathrm{sen}(x + f(x, y, z))} - 1.$$

Exercício
Suponha $xyf(x, y) + (f(x, y))^3 = x$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.[b]

Nos próximos exemplos, determinamos algumas derivadas ou mostramos sua inexistência, utilizando a definição por limite. É uma oportunidade para ilustramos os cálculos de limite explícitos:

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

Defina

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Fora da origem, temos um entorno onde vale a expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2+y^2) - (x^3 - y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + (3x+2)xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^3 - y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x^2+x^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ao trabalharmos em um ponto distinto da origem, vemos que há uma vizinhança desse ponto (ou uma bola aberta com centro nele) que não contém a origem. Nessa vizinhança, f é descrita somente pela expressão dada, que pode ser derivada pelas regras práticas sem reparos, como fizemos acima.

Contudo, a expressão não é válida na origem e devemos verificar o que acontece com o limite, no próximo slide. Quando $h, k \to 0$, temos ambos $(h,0), (0,k) \neq (0,0)$:

Na origem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} =$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0-k^2}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^2}{k^3} \text{ não existe.}$$

Há um outro modo de organizar esse cálculo: Inicialmente, trabalhamos em um ponto (a,b) qualquer; podemos fixar b e calcular a derivada usual da função com respeito a x, que é a única variável restante, assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \Big[\frac{df(x,b)}{dx}\Big]_{x=a}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Agora, especificamente na singularidade, temos

$$f(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^3-0}{x^2+0} = x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{array} \right\} = x \text{ sempre,}$$

de modo que obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \Big[\frac{df(x,0)}{dx}\Big]_{x=0} = \Big[\frac{dx}{dx}\Big]_{x=0} = 1.$$

Analogamente,

$$f(0,y) = \begin{cases} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1 & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

ou seja, $f(0,y)$ é descontínua em 0 e não é derivável aí.

Exercício

Calcule as derivadas parciais de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

em $(a,b) \neq (0,0)$ e em $(0,0)$. Mostre também que f não é contínua em $(0,0)$.[a]

Sugestão: Tome $g(t) = f(t,\sqrt{t})$; é g contínua? Qual sua relação com a continuidade de f ?

12.4 Derivadas direcionais

Em nosso estudo motivacional de superfícies, questionamos a possibilidade de investigar outras direções no plano tangente além das duas dadas pelas tangentes das curvas com um parâmetro fixado. É a derivada direcional que fornece essa resposta.

Suponha $f\colon D \to \mathbb{R}$ e a pto. interior de $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
Suponha u vetor unitário, isto é, $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} = 1$.
Defina

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h},$$

a *derivada de f na direção de u no ponto a.*

(Restringimos D à reta passando por a com direção u.)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A definição que demos é a canônica na literatura, mas pode ser conveniente tomar a derivada *na direção e no sentido de* u utilizando-se o limite lateral $h \to 0^+$. Esse refinamento permite identificar "bicos" no ponto a porque, em caso de derivabilidade, devemos ter $\frac{\partial f}{\partial(-u)}(a) = -\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ nesta formulação.

A derivada direcional mede a variação da função (ou "o coeficiente angular da reta tangente") na direção especificada pelo vetor, assim: "f cresce mais nesta direção, cresce menos naquela, decresce nessa, etc." Ao longo do curso, teremos várias oportunidades de entender e aplicar essa derivada; nesta seção, vejamos apenas algumas propriedades básicas.

Primeiramente, verifique que, fixados o vetor u e o ponto a, valem todas as regras básicas de derivação!

Exemplo

Derive $f(x,y,z) = 9xy - 5z^2$ no ponto $(1,0,-1)$ na direção $(2,1,2)$.

A direção é $(2,1,2)$, mas precisamos determinar o vetor unitário:

$$u = \frac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}).$$

Sempre que é dado $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, o vetor $u = v/\|v\|$ é unitário, como se verifica tomando diretamente a própria norma de u. Continuando:

Temos:

- $f(1,0,-1) = -5$;
- $f(1+\frac{2h}{3}, 0+\frac{1h}{3}, -1+\frac{2h}{3}) = 9(\frac{h}{3}+\frac{2h^2}{9}) - 5(1-\frac{4h}{3}+\frac{4h^2}{9})$;
- $\frac{1}{h}\big[f(1+\frac{2h}{3}, 0+\frac{1h}{3}, -1+\frac{2h}{3}) - f(1,0,-1)\big] = \frac{29}{3} - \frac{2h}{9} \xrightarrow{h\to 0} \frac{29}{3}$.

Exercício

Derive $f(x,y,z) = x^2 - 5yz + 3$ no ponto $(1,3,-2)$ na direção $(4,-3,0)$.[a]

Cuidado com o que você lê! É preciso determinar corretamente a direção pedida e certificar-se que o vetor é unitário. Veja:

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

(Demidovitch 1880) Derive $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ no ponto $(2,1,3)$ na direção *dele a* $(5,5,15)$.

A direção é $(5,5,15) - (2,1,3) = (3,4,12)$, donde

$$u = \frac{(3,4,12)}{\|(3,4,12)\|} = (\tfrac{3}{13}, \tfrac{4}{13}, \tfrac{12}{13}).$$

Temos:

- $f(2,1,3) = 2 + 3 + 6$;
- $f(2 + \frac{3h}{13}, 1 + \frac{4h}{13}, 3 + \frac{12h}{13}) = (2 + \frac{11h}{13} + \frac{12h^2}{169}) + (3 + \frac{24h}{13} + \frac{48h^2}{169}) + (6 + \frac{33h}{13} + \frac{36h^2}{169})$;
- $\frac{1}{h}\big[f(2 + \frac{3h}{13}, 1 + \frac{4h}{13}, 3 + \frac{12h}{13}) - f(2,1,3)\big] = \frac{68}{13} + \frac{96h}{169} \xrightarrow{h\to 0} \frac{68}{13}$.

Exercício

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é, $e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } j = i, \\ 0 \text{ se } j \neq i. \end{cases}$ Mostre $\|e_i\| = 1$ e, pelas definições, que[a]

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Você já conhece a base canônica de $\mathbb{R}^3$, embora com outros nomes: temos $e_1 = \vec{\imath}$, $e_2 = \vec{\jmath}$ e $e_3 = \vec{k}$.

Esse exercício alerta, simplesmente, que a derivada direcional é uma generalização das derivadas parciais, ou seja, não estamos limitados a considerar vetores tangentes apenas ao longo dos eixos cartesianos.

Também podemos trabalhar sobre outros modos de representar a restrição do domínio D a um eixo específico: Dado $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tome $u = v/\|v\|$ e mostre que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a + \varepsilon v) - f(a)}{\varepsilon \|v\|} = \frac{\partial f}{\partial u}(a).$$

Por que não podemos ter εv no quociente? E se tivéssemos $\|\varepsilon v\|$?

Há modos práticos de calcular a derivada direcional, usando-se gradiente ou cossenos diretores, que veremos oportunamente.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

12.5 Derivadas de ordem superior

Assuma $f\colon D \to \mathbb{R}$ derivável quanto a cada variável. Então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon D \to \mathbb{R}$$

também é função; se for derivável,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\colon D \to \mathbb{R}$$

também é função.

Escreve-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i};$$

se $j = i$, usa-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\Big) \text{ etc.}$$

Assim, a situação é a mesma das funções de uma variável, quando tínhamos f', f'', etc. Em diferentes livros, de diferentes épocas, a notação pode ser confusa, como f_{xy} ou f''_{xy} ou f_{yx} ou f''_{yx}, todas representando a mesma derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. *Note que, em alguns casos* (aqueles não cobertos pelo Teorema de Schwarz, a seguir), *a ordem das variáveis é importante!* Neste caso, derivamos primeiramente quanto a y e depois quanto a x.

Hessiano:

$$H_f = \det\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big]_{i,j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

O hessiano será muito utilizado na análise de máximos e mínimos. Como o determinante independe de transposição da matriz, pode-se também escrever $H_f = \det[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}]_{i,j}$.

Exercício
Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem e o hessiano de $f(x,y) = 4x^3y^2 - 2x^5$.[a]

Schwarz
Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (existem e) são contínuas em todo o domínio de f, então são idênticas.

O resultado é intuitivamente claro quando se consideram as regras de derivação, já que derivar com respeito a cada variável não altera as demais, de modo que as operações poderiam ser feitas em qualquer ordem.

A demonstração formal a seguir é excelente oportunidade para rever o cálculo de integrais múltiplas pelo Teorema de Fubini e um uso simbólico do Teorema Fundamental do Cálculo:

Demonstração
Suponha $a \in D$ de modo que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \text{ digamos } >.$$

(Queremos chegar a um absurdo.)

Fixando cada $x_k = a_k$ para $k \neq i, j$, supomos que f tem apenas duas variáveis x, y.

Considere $g\colon D \to \mathbb{R}$, $g = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Então g é contínua e $g(a) > 0$, donde $g > 0$ em vizinhança de a.

"Encolha" D de modo que $g > 0$ em $D = [K, L] \times [M, N]$. (Diagrama na lousa.)

Obtemos $\int_D g(x,y)\, d(x,y) > 0$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fubini e TFC:

$$\begin{aligned}\int_D \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Big)\, d(x,y) &= \int_M^N \int_K^L \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_M^N \Big[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big]_{x=K}^{x=L} dy = \\ &= \int_M^N \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(L,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(K,y)\Big)\, dy = \\ &= \big[f(L,y)\big]_{y=M}^{y=N} - \big[f(K,y)\big]_{y=M}^{y=N} = \\ &= f(L,N) - f(L,M) - f(K,N) + f(K,M)\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\int_D \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\Big)\, d(x,y) = f(L,N) - f(K,N) - f(L,M) + f(K,M)$$

Subtraindo: $\int_D g(x,y)\, d(x,y) = 0$, contradição.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 13

Campos Vetoriais

Este capítulo continua com o desenvolvimento necessário para responder às perguntas que fizemos no início de "Derivação Espacial". Estudaremos, principalmente, as funções cujo domínio e contradomínio estão contidos no mesmo espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, chamadas *campos vetoriais* e introduziremos o conceito de gradiente. Já um *campo escalar* é simplesmente uma função escalar de várias variáveis.

13.1 Campos vetoriais

Começamos por relembrar o papel dual ponto–vetor e dar um espaço tangente a cada ponto:

> Qual é a reta tangente a uma reta dada? A própria!
> Qual é o plano tangente a um plano dado? O próprio!
> $\mathbb{R}^n$ é tanto:
>
> - um espaço de pontos (sistema de coordenadas), como
> - um espaço tangente (vetores com direção, sentido e norma).
>
> Há uma cópia desse espaço tangente sobre cada ponto P, com o vetor nulo posicionado em P.

O campo vetorial associará, a cada ponto, um vetor "tangente" a esse ponto, que funcionará como origem de um espaço vetorial ajustado.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Um *campo vetorial* é uma função

$$F\colon \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{pontos}} \to \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{vetores}}$$

(note mesmo n; domínio pode ser subconjunto).

A cada ponto x, associa o vetor $F(x)$.

Representação: em cada x, desenhe a seta com base em x e ponta em $x + F(x)$.

Em geral, pede-se que o campo, como função, seja contínuo ou (como definiremos futuramente) suficientemente derivável.

Para definir um campo, tudo o que precisamos é, dadas as n coordenadas de um ponto, combiná-las para produzir as n coordenadas de outro vetor, que será desenhado com sua base localizada no ponto dado. Em outras palavras: Simbolicamente, um campo geralmente se apresenta como uma lista entre parênteses de n expressões, sendo cada expressão uma função escalar, sempre das mesmas n variáveis. Graficamente, veremos alguns exemplos a seguir.

Exemplo

$F(x, y) = (2, 1)$ (para $n = 2$).

(Diagrama na lousa.)

seta de (x, y) a $(x + 2, y + 1)$.

Exemplo

$F(x, y) = (y, -x)$ (para $n = 2$).

(Diagrama na lousa.)

seta de (x, y) a $(x + y, y - x)$.

Exercício

Represente os campos (para $n = 2$):

- $F(x, y) = (-2, 3)$;
- $G(x, y) = (x, 0)$;
- $H(x, y) = (y, x^2)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Campos centrais

F é *central* ou *radial* (com respeito à origem) se $(\forall x)\, F(x) \parallel x$.
Tipos:

- centrífugos (setas para fora);
- centrípetos (setas para a origem);
- e outros, misturados.

Para compreender a definição de campo central, lembre que um ponto x também é um vetor, que pode ser especialmente representado como a seta da origem até o próprio ponto x. Então F é central se $F(x)$ e x são vetores paralelos para qualquer x, ou seja, se sempre $F(x)$ é múltiplo escalar de x, existindo $\lambda_x \in \mathbb{R}$ de modo que $F(x) = \lambda_x \cdot x$. (Esse escalar pode variar, dependendo de x.) Nesse caso, quando aplicamos o vetor $F(x)$ ao ponto x, a reta que ele determina também deve passar pela origem, daí o nome "radial".

Dentre várias possibilidades, destacam-se duas: Quando os escalares λ_x, acima, são sempre positivos, dizemos que o campo é *centrífugo;* nesse caso, as setas que representam F graficamente apontam sempre para o sentido oposto à origem. Quando os λ_x são sempre negativos, dizemos que o campo é *centrípeto* e as setas no gráfico apontam sempre para a origem, mesmo que (por ter um comprimento muito grande) cheguem a ultrapassá-la.

Por exemplo, $F(x,y) = (-\frac{1}{3}x, -\frac{1}{3}y)$ (para $n = 2$): seta de (x,y) a $(\frac{2}{3}x, \frac{2}{3}y)$, centrípeto.
(Diagrama na lousa.)

Represente (para $n = 2$)

$$F(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).$$

(Marque uma bola aberta na origem.) Esse campo é central (exceto na origem)? Qual é seu tipo? Por quê? (Note que cada vetor é unitário.)

Sugestão: Será muito trabalhoso e impreciso desenhar esse campo a partir de um punhado de pontos (x,y) através do cálculo repetido de $(x,y)+F(x,y)$; vale a pena tentá-lo somente com uso de computação gráfica. O espírito do

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

exercício é perceber isto: Comece mostrando que o campo é centrífugo e unitário, com base nas definições teóricas. Então bastará desenhar setas por todo o plano, sempre sobre retas que passam pela origem (radiais), apontadas em oposição à origem (centrífugas) e com comprimento 1 (unitárias). Isso será suficiente porque, ao determinar sua direção, seu sentido e seu módulo, descrevemos esses vetores completamente. □

Convém conhecermos mais dois exemplos importantes; o primeiro mostra também como se determina a expressão de um campo:

Campo da aceleração gravitacional

Grande massa M centrada na origem ($n = 3$):
Massa m distante d sofre força GMm/d^2.
Aceleração a de m:

- magnitude GM/d^2;
- centrípeta.

(Campo elétrico entre cargas de mesmo sinal: centrífugo.)

(Lembre agora que $u = v/\|v\|$ implica $v = \|v\| \cdot u$, então todo vetor é sua norma vezes o unitário com mesma direção e sentido.)

Então $\|a(x,y,z)\| = \dfrac{GM}{\|(x,y,z)\|^2}$ e

$$\begin{aligned} a(x,y,z) &= \|a(x,y,z)\| \cdot \text{“unitário centrípeto”} = \\ &= \frac{GM}{\|(x,y,z)\|^2} \cdot \frac{-(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} = \\ &= -\frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot (x,y,z). \end{aligned}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Campos circulares

F é *circular* (com respeito à origem) se $(\forall x)\, F(x) \perp x$.
Tipos:

- anti-horários;
- horários;
- e outros, misturados.

Teste de circularidade: $\langle F(x)|x\rangle = 0$.

Para representar campos circulares, valem idéias semelhantes às de campos centrais: desenhe retas passando pela origem e, em seus pontos, marque vetores perpendiculares.

Represente (para $n = 2$)

$$F(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(-y,x)\|} = \Big(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).$$

(Marque uma bola aberta na origem.) Esse campo é circular (exceto na origem)? Qual é seu tipo? Por quê? (Note que cada vetor é unitário.)

No plano ($n = 2$), o sinal de $\langle F(x,y)|(-y,x)\rangle$ é positivo se F for um campo anti-horário e negativo se F for horário. Outro modo de verificar o sentido de rotação é, conhecendo os sinais de x e y em cada quadrante, usá-los para determinar os sinais das componentes horizontal e vertical de $F(x,y)$.

Exercício

Represente os campos unitários correspondentes, respectivamente, às expressões (x,y), $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$, (y,x), $(-y,x)$, $(y,-x)$, $(-y,-x)$.

13.2 O operador ∇

Lê-se ∇ como "nabla" ou ainda "del", com cuidado para não confundir com o "del" ∂.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

É o "vetor"

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big).$$

Podemos aplicá-lo de três modos:

Usaremos ∇ em três operações: gradiente, divergente e rotacional. Essas operações são diferentes "formas de derivar" funções escalares e campos, cada uma adequada a uma aplicação, como veremos futuramente. Para memorizá-las, podemos lembrar as três operações possíveis com um vetor e interpretá-las como operações simbólicas com ∇, como explicaremos em seqüência a cada slide.

Gradiente

Dada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$$

é o *gradiente* de f e campo sobre $\mathbb{R}^n$.

Ex.: $f = x^3 \operatorname{sen} y + z \Rightarrow \operatorname{grad} f = (3x^2 \operatorname{sen} y, x^3 \cos y, 1)$.

Essa operação corresponde a "multiplicar" (justapor) simbolicamente a expressão vetorial ∇ por uma expressão escalar f.

O gradiente de uma função escalar, ou seu vetor calculado em um ponto específico, terá uma interpretação muito importante que veremos ainda neste capítulo e que usaremos pelo restante do curso: ele indica a direção e o sentido de maior crescimento da função.

Divergente

Dado $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{div} F = \langle \nabla | F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

é o *divergente* de F e função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ex.: $F = (x^2 y, 2^x z \operatorname{sen} y, x + 3) \Rightarrow \operatorname{div} F = 2xy + 2^x z \cos y + 0$.

Simbolicamente, tomamos o produto interno dos "vetores" ∇ e F. A notação para o divergente, para cada autor, dependerá obviamente de sua notação para produto interno: você poderá encontrar, por exemplo, $\nabla \cdot F$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Interpretação do divergente: Para entendermos o significado de $\operatorname{div} F$, trabalharemos com $n = 3$ e em um ponto (a, b, c). Quando calculado nesse ponto, o divergente é um número real que mede a "taxa total de variação" do campo F no ponto.

Suponhamos que F indica a velocidade de deslocamento de cada ponto de um gás. Podemos, então, perguntar quanto gás entra ou sai de um cubo de lado $2h$ centrado em (a, b, c) e com faces paralelas aos planos coordenados. Não há por que o saldo final ser nulo: pode haver compressão ou expansão locais do gás dentro do cubo, ou ainda haver uma fonte ou um sumidouro.

Ao longo das faces com abscissa $x = a - h$ e $x = a + h$, tomaremos $F(a - h, b, c)$ e $F(a + h, b, c)$, respectivamente, como representantes médios de F; se h for pequeno, essa é uma boa aproximação. Como essas faces são paralelas ao plano Oyz, somente a primeira componente de F, que lhes é ortogonal, efetivamente contribui com entrada ou saída de gás do cubo; as outras componentes são paralelas às faces e não "entram" ou "saem" da superfície. Desse modo, o saldo de gás contribuído especificamente por essas duas faces é $F_1(a + h, b, c) - F_1(a - h, b, c)$. Note que essa expressão é a mesma independentemente do sinal de F_1 em cada ponto, o que corresponde à entrada ou saída de gás pela face conforme a orientação do vetor.

Analogamente, ao longo de $y = b - h$ e $y = b + h$ temos o saldo $F_2(a, b + h, c) - F_2(a, b - h, c)$, enquanto ao longo de $z = c - h$ e $z = c + h$ temos $F_3(a, b, c + h) - F_3(a, b, c - h)$, de modo que a taxa de variação total é

$$\lim_{h\to 0} \frac{\begin{array}{r} F_1(a+h,b,c) - F_1(a-h,b,c) \\ + F_2(a,b+h,c) - F_2(a,b-h,c) \\ + F_3(a,b,c+h) - F_3(a,b,c-h) \end{array}}{2h} = \\ = \frac{\partial F_1}{\partial x}(a,b,c) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b,c) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(a,b,c). \quad \square$$

Rotacional

Dado $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

é o *rotacional* de F e campo sobre $\mathbb{R}^3$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fizemos o produto vetorial, simbólico, dos "vetores" ∇ e F, podendo também ser indicado $\nabla \times F$. Em inglês, o rotacional chama-se *curl*. O determinante simbólico no slide é um modo prático de não confundir as componentes do rotacional e os sinais envolvidos, mas ele também pode ser expresso assim:

$$\operatorname{rot} F = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big).$$

Exemplo: $F = (x^2y, z\ln x, y + \operatorname{sen} z)$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & z\ln x & y + \operatorname{sen} z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}(\tfrac{\partial}{\partial y}(y + \operatorname{sen} z) - \tfrac{\partial}{\partial z} z\ln x) +$$
$$+ \vec{\jmath}(\tfrac{\partial}{\partial z} x^2y - \tfrac{\partial}{\partial x}(y + \operatorname{sen} z)) +$$
$$+ \vec{k}(\tfrac{\partial}{\partial x} z\ln x - \tfrac{\partial}{\partial y} x^2y) =$$

$$= (1 - \ln x, 0, x^{-1}z - x^2).$$

Interpretação do rotacional: O campo $\operatorname{rot} F$ calculado em um ponto (a, b, c) é um vetor que indica o quanto uma pequena esfera nesse ponto deverá girar quando submetida ao campo de forças F. De fato, além da força $F(a, b, c)$ que atua para deslocar a esfera, pequenas diferenças entre as forças atuando em dois hemisférios fazem com que um acelere mais que o outro (mesmo que seja no mesmo sentido) e que a esfera adquira rotação.

Para compreendê-lo, dividiremos a rotação total em três componentes, paralelas aos eixos coordenados, e calcularemos aquela paralela ao eixo Oz, sendo as outras duas análogas. Nesse caso, podemos substituir a esfera por seu disco equatorial no plano $z = c$ (paralelo a Oxy) e ignorar a componente F_3 do campo, que poderia fazer o disco subir ou descer, mas não girar nesse eixo.

A tendência à rotação deve ser medida com a mesma orientação que se dá à própria rotação: o sentido anti-horário, que corresponde à base canônica. Com essa orientação, supondo que o disco tenha raio h, a atuação resultante da componente F_2 ao longo do eixo Oy é

$$\underbrace{F_2(a + h, b, c)}_{\text{à direita do centro}} - \underbrace{F_2(a - h, b, c)}_{\text{à esquerda do centro}}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

e a de F_1 ao longo de Ox é

$$\underbrace{F_1(a, b-h, c)}_{\text{abaixo do centro}} - \underbrace{F_1(a, b+h, c)}_{\text{acima do centro}},$$

já embutidos os possíveis sinais para F_1, F_2 caso se oponham aos sentidos canônicos dos eixos. Somando as duas contribuições e calculando a taxa de variação correspondente, obtemos

$$\frac{F_2(a+h, b, c) - F_2(a-h, b, c)}{2h} - \frac{F_1(a, b+h, c) - F_1(a, b-h, c)}{2h}$$

(note que já invertemos o sinal do segundo numerador), cujo limite quando $h \to 0$ é a terceira componente do rotacional:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{F_1}{\partial y} \quad \text{em } (a, b, c). \qquad \square$$

Exercício
Dados

- $f(x, y, z) = 5x^2y - 3z \operatorname{sen} y$ e
- $F(x, y, z) = (x^2y, 2xz, y\cos(yz))$,

calcule $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} F$ e $\operatorname{rot} F$.[a]

Regras operacionais: Gradiente, divergente e rotacional são formas de derivação e possuem suas próprias regras de cálculo que listamos aqui e cuja verificação, a partir das definições acima, deixamos a seu cargo; é preciso apenas utilizar as propriedades análogas da derivação parcial. Para funções $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e campos $F, G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com índices, sendo $n = 3$ quando se envolve o rotacional, temos:

- $\operatorname{grad}(c_1 f_1 \pm c_2 f_2 \pm \ldots) = c_1 \operatorname{grad} f_1 \pm c_2 \operatorname{grad} f_2 \pm \ldots$;
- $\operatorname{div}(c_1 F_1 \pm c_2 F_2 \pm \ldots) = c_1 \operatorname{div} F_1 \pm c_2 \operatorname{div} F_2 \pm \ldots$;
- $\operatorname{rot}(c_1 F_1 \pm c_2 F_2 \pm \ldots) = c_1 \operatorname{rot} F_1 \pm c_2 \operatorname{rot} F_2 \pm \ldots$;
- $\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$;
- $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}$;

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- $\operatorname{grad}(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \operatorname{grad} f$ onde $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- $\operatorname{div}(fF) = (\operatorname{div} f)F + f \operatorname{grad} F$.

Esses são os exercícios 2375, 2381, 2384 de Demidovitch. □

Combinações das três operações: A composição

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

é o *laplaciano* de f, indicado $\nabla^2 f$ ou Δf, importante nos estudos de equações diferenciais parciais e de funções complexas analíticas. Já $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)$ e $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$ são ambos nulos quando se pode aplicar o Teorema de Schwarz. Por exemplo, a primeira componente de $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$ é

$$\frac{\partial(\nabla f)_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(\nabla f)_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big) = 0. \qquad \square$$

13.3 Campos conservativos

Um campo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dito *conservativo* quando existe $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F = \operatorname{grad} f$.

f é chamada *potencial*.

Teorema

Isso ocorre se e somente se $\operatorname{rot} F \equiv 0$.

Note o domínio $\mathbb{R}^3$.

Atenção

Em algumas áreas, requer-se $F = -\operatorname{grad} f$.

O potencial é simplesmente um campo escalar; em alguns estudos, pode-se trabalhar com $-f$ em vez de f.

Se $\operatorname{rot} F \neq 0$, então F não é conservativo. Se $\operatorname{rot} F = 0$, então F é conservativo e é o gradiente de alguma função escalar f, que veremos como encontrar a seguir.

O mesmo teorema pode ser enunciado para campos cujos domínios sejam subonjuntos próprios de $\mathbb{R}^3$, mas é preciso requerer "conectividade simples", isto é, que o domínio não possa conter um laço incontrátil. Por exemplo, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é simplesmente conexo, apesar de ter um "buraco", mas nem $\mathbb{R}^3 \setminus Ox$ nem um toro sólido são simplesmente conexos, porque um círculo em torno deles não pode ser encolhido a um único ponto por dentro desses domínios.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$F(x,y,z) = (xy, yz, 3x^2)$. Temos

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & 3x^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial y}3x^2 - \tfrac{\partial}{\partial z}yz, \tfrac{\partial}{\partial z}xy - \tfrac{\partial}{\partial x}3x^2, \tfrac{\partial}{\partial x}yz - \tfrac{\partial}{\partial y}xy\right) = \\ &= (-y, -6x, -x) \not\equiv 0.\end{aligned}$$

Então F não é conservativo.

Exemplo

$G(x,y,z) = (4xy + z, 2x^2 + 2yz^3, 3y^2z^2 + x - 10z)$. Temos

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} G &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy + z & 2x^2 + 2yz^3 & 3y^2z^2 + x - 10z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial y}(3y^2z^2 + x - 10z) - \tfrac{\partial}{\partial z}(2x^2 + 2yz^3)\right)\vec{\imath} + \\ &+ \left(\tfrac{\partial}{\partial z}(4xy + z) - \tfrac{\partial}{\partial x}(3y^2z^2 + x - 10z)\right)\vec{\jmath} + \\ &+ \left(\tfrac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 2yz^3) - \tfrac{\partial}{\partial y}(4xy + z)\right)\vec{k} = \\ &= (6yz^2 - 6yz^2, 1 - 1, 4x - 4x) = (0,0,0) \equiv 0.\end{aligned}$$

Então G é conservativo, com $G = \operatorname{grad} f$ para alguma f. Vamos achar f:

Queremos $G = \nabla f$, mas

$$\begin{aligned}G = \nabla f &\Leftrightarrow (4xy + z, 2x^2 + 2yz^3, 3y^2z^2 + x - 10z) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2yz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3y^2z^2 + x - 10z \end{cases}\end{aligned}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Integrando a primeira equação:

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int (4xy + z)\, dx = 2x^2y + zx + A(y, z);$$

A é a constante da integração quanto a x: independe de x, mas pode depender de y, z.

Substituindo no sistema, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2yz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3y^2z^2 + x - 10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy + z + \cancelto{0}{\frac{\partial A}{\partial x}} = 4xy + z \text{ (verificado!)} \\ 2x^2y + 0 + \frac{\partial A}{\partial y} = 2x^2 + 2yz^3 \\ 0 + x + \frac{\partial A}{\partial z} = 3y^2z^2 + x - 10z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} = 2yz^3 \\ \frac{\partial A}{\partial z} = 3y^2z^2 - 10z \end{cases}$$

Agora, repetimos o procedimento, mas com respeito ao novo sistema:

De $\frac{\partial A}{\partial y} = 2yz^3$ vem

$$A = \int \frac{\partial A}{\partial y}\, dy = \int 2yz^3\, dy = y^2z^3 + B(z);$$

B é a constante de integração quanto a y: independe de y, mas pode depender de z (x não aparece porque não consta em $A(y, z)$).

Substituindo no sistema, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} = 2yz^3 \\ \frac{\partial A}{\partial z} = 3y^2z^2 - 10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2yz^3 + \cancelto{0}{\frac{\partial B}{\partial y}} = 2yz^3 \text{ (verificado!)} \\ 3y^2z^2 + \frac{\partial B}{\partial z} = 3y^2z^2 - 10z \end{cases} \Rightarrow \frac{dB}{dz} = -10z$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Finalmente, de $\frac{dB}{dz} = -10z$ vem $B = -5z^2 + C$ constante.
Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 2x^2y + zx + A(y,z) = \\ &= 2x^2y + zx + y^2z^3 + B(z) = \\ &= 2x^2y + zx + y^2z^3 - 5z^2 + C. \end{aligned}$$

Verificamos:

$$\nabla f = (4xy + z, 2x^2 + 2yz^3, x + 3y^2z^2 - 10z) = G.$$

Sempre verifique seu trabalho!

A constante de integração tem a mesma razão de ser e o mesmo papel que estudamos para primitivas de funções de uma variável, porque o gradiente é uma forma de derivação. Assim, um potencial só está plenamente determinado quando se fixa seu valor em um ponto de interesse.

Para um segundo exemplo, considere o campo

$$F(x,y,z) = (6x^2y^3z, 6x^3y^2z - 2\cos 2y \operatorname{sen} z, 2x^3y^3 - \operatorname{sen} 2y \cos z - 2e^{-2z}).$$

Para determinar f com $\operatorname{grad} f = F$, montamos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^3z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y^2z - 2\cos 2y \operatorname{sen} z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3y^3 - \operatorname{sen} 2y \cos z - 2e^{-2z} \end{cases}$$

Escolhemos qualquer uma das três equações para integrar com respeito à variável correspondente; neste caso, a primeira é mais simples:

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int 6x^2y^3z\, dx = 2x^3y^3z + A(y,z),$$

em que a constante de integração A pode ser uma expressão envolvendo y e z porque ainda terá derivada zero com respeito a x.

Substituímos essa expressão obtida para f no sistema, conferindo que a equação utilizada para sua dedução é satisfeita e, simplificando as outras equações, obtendo um sistema agora para A:

$$\begin{cases} \cancel{6x^2y^3z} + \cancel{\frac{\partial A}{\partial x}}^{0} = \cancel{6x^2y^3z} \\ \cancel{6x^3y^2z} + \frac{\partial A}{\partial y} = \cancel{6x^3y^2z} - 2\cos 2y \operatorname{sen} z \\ \cancel{2x^3y^3} + \frac{\partial A}{\partial z} = \cancel{2x^3y^3} - \operatorname{sen} 2y \cos z - 2e^{-2z} \end{cases}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Desse modo, vem:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} = -2\cos 2y \operatorname{sen} z \\ \frac{\partial A}{\partial z} = -\operatorname{sen} 2y \cos z - 2e^{-2z} \end{cases}$$

Integrando a nova primeira equação, temos:

$$A = \int \frac{\partial A}{\partial y}\, dy = \int (-2\cos 2y \operatorname{sen} z)\, dy = -\operatorname{sen} 2y \operatorname{sen} z + B(z),$$

em que B pode ser uma expressão envolvendo z, sendo constante com respeito a y, mas não pode envolver x, porque A já não tem essa variável.

Agora, substituímos A no sistema em questão, verificando a equação utilizada e simplificando a restante:

$$\begin{cases} \cancel{-2\cos 2y \operatorname{sen} z} + \cancel{\frac{\partial B}{\partial y}}^{0} = \cancel{-2\cos 2y \operatorname{sen} z} \\ \cancel{-\operatorname{sen} 2y \cos z} + \frac{\partial B}{\partial z} = \cancel{-\operatorname{sen} 2y \cos z} - 2e^{-2z} \end{cases}$$

de modo que

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -2e^{-2z}.$$

Concluímos com a integração

$$B = \int \frac{\partial B}{\partial z}\, dz = \int (-2e^{-2z})\, dz = e^{-2z} + C,$$

em que C é realmente constante porque se integrou com respeito a z e x, y não podem constar em B.

Finalmente, substituímos B em A e A em f para obter a expressão desejada:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 2x^3y^3z + A(y,z) = \\ &= 2x^3y^3z - \operatorname{sen} 2y \operatorname{sen} z + B(z) = \\ &= 2x^3y^3z - \operatorname{sen} 2y \operatorname{sen} z + e^{-2z} + C. \end{aligned}$$

Devemos verificar que f assim obtida satisfaz $\operatorname{grad} f = F$ calculando o gradiente por sua definição.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercícios

Decida se estes campos são conservativos e, em caso afirmativo, determine seus potenciais:

- $(5x^4y^3 - 7, 3x^5y^2 + z\cos(yz), y\cos(yz))$;[a]
- $(4xy + z, 2x^2 + 5z^3, x + 15z^2y)$;[b]
- $-\dfrac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z)$ (aceleração gravitacional).[c]

Verifique suas respostas calculando os gradientes das funções candidatas a potencial.

Para $n = 3$, está disponível o teste de conservação com o rotacional nulo. Para outros valores de n, porém, ainda vale esse método para encontrar um potencial cujo gradiente será o campo dado: basta eliminar repetidamente as variáveis até chegar a $n = 1$, quando se trata de uma primitiva tradicional.

13.4 Direção e sentido de maior crescimento

Esta seção e a próxima apresentam interpretações do gradiente e como utilizá-lo em cálculos.

Uso do gradiente em cálculos

Tome

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva;
- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função escalar;
- $f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ composta FUV.

(Diagrama na lousa.)

Veremos no capítulo "Diferenciação" que a condição de continuidade no slide a seguir é suficiente para as propriedades enunciadas, mas lembramos, como vimos no capítulo anterior, que não valem sempre.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se as componentes de ∇f são contínuas, então:

- $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$ (Regra da Cadeia);
- $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle \nabla f(a) | u \rangle$ para u unitário.

Lembre que, quando calculado em um ponto qualquer (a), o gradiente de f é um vetor. A primeira equação é uma forma da Regra da Cadeia: em relação à regra que já conhecemos para uma variável, a novidade é a substituição do produto de números pelo produto interno de vetores.

Exercício
Usando ∇f, derive novamente $f(x, y, z) = x^2 - 5yz + 3$ no ponto $(1, 3, -2)$ na direção $(4, -3, 0)$.

(Diagrama na lousa.)
Temos:

- $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle \nabla f(a) | u \rangle = \|\nabla f(a)\| \cdot \cancelto{1}{\|u\|} \cdot \cos\theta$;
- $\operatorname{proj}_u \nabla f(a) = \big(\|\nabla f(a)\| \cdot \cos\theta\big) \cdot u$.

Ou seja, $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ é a componente escalar de $\nabla f(a)$ na direção de u.

Neste raciocínio, mantenha o ponto a fixo, de modo que o vetor $\nabla f(a)$ também é constante. Conforme u assume todas as possíveis direções e sentidos, o ângulo θ varia e também $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ varia.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Temos $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \|\nabla f(a)\| \cos\theta$ e (quando $\nabla f(a) \neq 0$):

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \text{ é } \left\{\begin{array}{c}\text{máximo}\\ \text{mínimo}\\ \text{zero}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \cos\theta = \left\{\begin{array}{c}1\\ -1\\ 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \theta = \left\{\begin{array}{c}0\\ \pi\\ \pm\pi/2\end{array}\right\}.$$

Então, no ponto a,

$$f \left\{\begin{array}{c}\text{cresce mais}\\ \text{decresce mais}\\ \text{mantém-se}\end{array}\right\} \text{ na direção e sentido } \left\{\begin{array}{c}\nabla f(a)\\ -\nabla f(a)\\ \text{ortogonais a } \nabla f(a)\end{array}\right\}.$$

Note que, quando $\cos\theta = -1$, esse número é *negativo* e f diminui!

Alguns livros e exercícios pedem a taxa de variação de f nessas direções e sentidos principais: ela é simplesmente a derivada direcional e vale, respectivamente, $\|\nabla f(a)\|$, $-\|\nabla f(a)\|$ e 0 (como se vê substituindo-se os valores $1, -1, 0$ de $\cos\theta$).

Rosa dos ventos ($n = 2$)*:* figura na lousa.

Note que as potências sucessivas de $\left[\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$ são I, $\left[\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$, $-I$, $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]$. Essa matriz é a transformação vetorial de rotação anti-horária de 90°.

Outro modo de montar a "rosa dos ventos" no plano é, escrevendo-se $\nabla f(a, b) = (u, v)$, assim:

- o sentido de maior crescimento é (u, v);
- o oposto é $(-u, -v)$;
- os transversais são $(-v, u)$ e $(v, -u)$.

Esses são *vetores* a partir do ponto (a, b). Para conferir a onde apontam, estude os sinais efetivos das componentes. Note que, para determinar a direção e os sentidos transversais, permutamos as duas componentes e trocamos o sinal de uma, depois de outra. Desse modo, o produto interno com (u, v) é sempre 0, confirmando a ortogonalidade.

A figura também mostra a curva de nível $f = f(a, b)$, de que trataremos na próxima seção: são os pontos onde f tem o valor constante $f(a, b)$. Essa

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

curva pode ter traçados e sentidos de curvatura diferentes, mas é sempre tangente à reta de direção $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \nabla f(a,b)$ no ponto (a,b).

Exercício

Temperatura no plano: $f(x,y) = 5x^2y - 2y^3x$. No ponto $(1,3)$, identifique as direções e sentidos em que: a temperatura cresce mais rapidamente; a temperatura diminui mais rapidamente; a isoterma estende-se.[a] Esquematize isso em um diagrama.

Exemplo do Guidorizzi ($n = 2$)*:* Digamos que, em um ponto (x,y) em um mapa plano, uma montanha tenha altura $f(x,y) = 5 - x^2 - 4y^2$. Um alpinista em $(1,1)$ deseja traçar o caminho mais íngreme para sua escalada.

Então, ele escalará sempre no sentido de $\nabla f(x,y) = (-2x, -8y)$. Para determinar o caminho correspondente no mapa, que chamaremos de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, devemos considerar a relação $\dot\gamma(t) \parallel \nabla f(\gamma(t))$ com a condição inicial $\gamma(0) = (1,1)$.

Substituiremos esse paralelismo pela relação mais forte de igualdade, porque uma pretensa velocidade de escalada do alpinista não importa, *a priori,* para o traçado de seu percurso, o que nos possibilita eliminar uma função desconhecida: um fator positivo de proporcionalidade, que pode variar com o tempo. Assim, pondo $\dot\gamma(t) = \nabla f(\gamma(t))$, vem:

$$\begin{cases} \dot x(t) = -2x(t), \ x(0) = 1 \\ \dot y(t) = -8y(t), \ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resolvemos esses dois problemas de valor inicial pelo método comum de separação de variáveis, obtendo $x(t) = e^{-2t}$ e $y(t) = e^{-8t}$, o que fornece uma parametrização do caminho do alpinista, cujas coordenadas horizontais então obedecem a relação $y = x^4$ que se pode traçar no mapa (é a projeção sobre o plano Oxy).

Isso não significa, imediatamente, que no instante t o alpinista esteja em $(x(t), y(t))$, porque essa solução para γ não considerou a dificuldade da escalada e as técnicas do alpinista. (De fato, note que, por essa parametrização, o alpinista jamais chegará ao cume localizado na origem, afinal, $x(t), y(t) \to 0$ somente com $t \to \infty$.)

Outra parametrização possível e mais realista é tomar $x = 1 - s$ e $y = (1-s)^4$, com $s \in [0,1]$, que também satisfaz $y = x^4$; verifique que a curva δ assim descrita satisfaz $\delta(0) = (1,1)$, $\delta(1) = (0,0)$ e $\dot\delta(s) \parallel \nabla f(\delta(s))$ porque, de fato, $\dot\delta(s) = 2(1-s) \cdot \nabla f(\delta(s))$. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

13.5 Curvas e superfícies de nível

O conceito de superfície de nível é um modo de resgatar a motivação e definição de curvas e superfícies como *lugares geométricos,* isto é, coleções dos pontos que satisfazem propriedades ou equações dadas.

Assuma $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
$S_c = \{\, x \in D \mid f(x) = c \,\}$ é a *superfície de nível* c. (Diagrama na lousa.)
(Para $n = 2$, diz-se "curva de nível".)

Você já conhece curvas de nível de seus estudos de Geografia: isotérmicas, isobáricas e isoietas são curvas em um mapa ao longo das quais, respectivamente, a temperatura, a pressão e a precipitação são constantes.

Suponha $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ curva contida em S_c, isto é, $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq S_c$. (Diagrama na lousa.)
Então $f(\gamma(t)) = c$ para todo $t \in I$.
Derive:

$$\langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = c' = 0.$$

Se $I \ni 0$, $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v$, temos

$$\langle \nabla f(a) | v \rangle = 0, \text{ donde } \nabla f(a) \perp v.$$

Tomando todos os γ (todos os v tangentes a S_c em a):

$$\nabla f(a) \perp S_c.$$

Na última passagem do raciocínio, generalizamos o cálculo feito para uma curva γ qualquer, desde que passe por a no instante 0, mas com qualquer direção. (Sem dúvida, seria preciso demonstrar que cada direção é realizada pelo vetor tangente a uma curva, ou seja, que essa curva existe para cada direção.) Desse modo, obtemos o mesmo resultado para qualquer vetor v, correspondente a $\gamma'(0)$, tangente à superfície em a. Como $\nabla f(a)$ é um vetor ortogonal a todos eles, então é ortogonal à própria superfície.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo (n=3)

Determinar a reta normal e o plano tangente à superfície de nível de $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$ com $c = 8$ por $a = (1,-1,1)$.

Temos:

- $\nabla f(x,y,z) = (2x, 6y, 8z)$;
- $f(a) = f(1,-1,1) = 1 + 3 + 4 = 8 = c$ (importante);
- $S_c = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8 \,\}$ (elipsóide).

É importante, ao determinar-se uma tangência, verificar se o ponto realmente pertence à superfície dada, ou seja, se $a \in S_c$. *Não consideramos o caso $a \notin S_c$ neste tratamento!*

Então $\nabla f(a) = (2,-6,8) \perp S_c$.

Reta normal por a:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= a + \lambda \nabla f(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ &= (1 + 2\lambda, -1 - 6\lambda, 1 + 8\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Plano tangente por a: (diagrama na lousa)

$$(x,y,z) = a + (u,v,w) \text{ onde } (u,v,w) \perp \nabla f(a);$$

mas

$$(u,v,w) \perp \nabla f(a) \Leftrightarrow \langle (u,v,w) | \nabla f(a) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2u - 6v + 8w = 0.$$

Também

$$(u,v,w) = (x,y,z) - a = (x-1, y+1, z-1),$$

de modo que o plano é

$$2(x-1) - 6(y+1) + 8(z-1) = 0,$$

ou seja, $x - 3y + 4z - 8 = 0$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

É fácil abstrair a fórmula geral para o plano tangente: basta simplificar a equação $\langle \nabla f(a) | x - a \rangle = 0$, obtendo-se

$$\sum_{i=1}^{n} (\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)) x_i - \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)) a_i = 0.$$

Exercício

Determine a reta normal e o plano tangente a $x^2 + 2y^2 - 3z^3 = 5$ no ponto $(0, 1, -1)$. (Quais são f, c, a ?)[a]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 14

Diferenciação

Este capítulo completa a resposta às perguntas que fizemos em "Derivação Espacial". Já vimos derivação de curvas (com uma variável escalar e valor vetorial), derivação parcial de funções escalares com várias variáveis e diversas formas de derivação de campos. Agora, derivaremos uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *em geral* e veremos como aquelas derivações eram casos particulares desta mesma operação.

Também daremos significado, enfim, a condições de "suficiente diferenciabilidade" sobre curvas e campos que são utilizadas em enunciados precisos. O capítulo ainda contém várias demonstrações, algumas em slide e outras no texto adicional: como em todo o Cálculo, cada uma não é apenas importante por provar alguma tese, mas muito mais por conter ao menos uma técnica ou raciocínio chave.

14.1 Diferenciabilidade

Para reproduzir vetorialmente os cálculos que determinaram a melhor aproximação linear em "Uma Variável", a partir da pág. 171, faremos uso de matrizes, das funções que induzem (chamadas *transformações lineares* em Álgebra Linear) e do produto matricial. Com isso, definiremos funções de 1ª ordem e "melhores aproximações lineares" vetoriais com várias variáveis.

Matriz $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ induz função

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto Ax$$

onde x é visto como vetor coluna.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A respeito das funções induzidas por matrizes, note que a soma de matrizes $m \times n$ corresponde à soma dessas funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Não há um produto específico dessas funções e, de fato, o produto de matrizes $k \times m$ e $m \times n$ corresponde à composição $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ das funções induzidas. Em Álgebra Linear, essa é a tradução entre as chamadas *transformações lineares* e suas representações matriciais.

Para aprofundar o entendimento sobre essas funções, escrevamos o produto Ax como o vetor $(A_1x, \ldots, A_mx)$, onde A_i é a i-ésima linha da matriz A e, portanto, A_ix é a combinação dessa linha com o vetor coluna x feita na multiplicação matricial. Note que tanto A_i como x são vetores em $\mathbb{R}^n$, de modo que A_ix é igual ao produto interno $\langle A_i|x\rangle$. Assim, $|A_ix| \leqslant \|A_i\| \cdot \|x\|$ e então

$$\|Ax\|^2 = |A_1x|^2 + \ldots + |A_nx|^2 \leqslant \|A_1\|^2\|x\|^2 + \ldots + \|A_n\|^2\|x\|^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2 \|x\|^2.$$

Com a notação especial

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2},$$

obtemos a desigualdade $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$.

Isso leva-nos a observar que uma matrix $m \times n$ é essencialmente um vetor com mn coordenadas, ou seja, que há uma identificação entre $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{mn}$. Matrizes e vetores são somados do mesmo modo, coordenada a coordenada, e suas normas são definidas identicamente; apenas a multiplicação matricial é uma nova forma de produto. Essa identificação até sugere a notação $\mathbb{R}^{m\times n}$ para o conjunto $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$, utilizada em algumas áreas.

Função de 1ª ordem:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = u + Ax$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Note que

$$\|f(x) - f(a)\| = \|Ax - Aa\| = \|A(x-a)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x - a\|.$$

Desse modo, toda função de 1ª ordem é uniformemente contínua!

Exercício
Sendo f como antes e $g(y) = v + By$, em que condições podemos formar $f + g$ ou $g \circ f$? Mostre que, então, cada função também é de 1ª ordem.[a]

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Agora podemos construir a melhor aproximação de 1ª ordem a uma função qualquer. O raciocínio, aqui, será análogo ao que fizemos em "Derivação": ao substituir f por uma função, que pretendemos que aproxime a primeira, convém estudar o erro cometido.

Dados $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D$ interior e $f\colon D \to \mathbb{R}^m$.
Queremos substituir $f(x)$, ao redor de a, por uma expressão de 1ª ordem $L(x) = u + Ax$.

Erro absoluto: $E(x) = f(x) - (u + Ax)$.
Impomos $E(a) = 0$ (exatidão em a), donde

$$u + Aa = f(a).$$

(Diagrama na lousa.) Não distinguimos ainda a melhor aproximação!

Erro relativo:

$$\frac{E(x)}{\|x-a\|} = \frac{f(x) - (u + Ax)}{\|x-a\|} \overset{u+Aa=f(a)}{=\!=\!=} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|}.$$

Não podemos calcular em $x = a$: tomamos limite.

(Observe que precisamos tomar a norma no denominador porque não se divide por vetor; o limite será vetorial.)

Proposição
Se existir uma matriz A tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

então A é única.
Assim, distinguimos uma aproximação: únicos A e $u = f(a) - Aa$).

Demonstração: Suponha que tenhamos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - B(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

para duas matrizes A, B. Subtraindo as equações e simplificando, obtemos

$$\lim_{x\to a} \frac{(B-A)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Em particular, se $x = a + he_i$ com h real, temos $x \to a$ conforme $h \to 0$ e vem $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|he_i\|}(B-A)(he_i) = 0$, ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}(B-A)e_i = 0.$$

Substituímos, assim, o limite geral por um particular, ao longo da reta por a que é paralela ao eixo Ox_i. Essa é a idéia central da demonstração, que veremos novamente no próximo raciocínio.

Como $h/|h| = \pm 1$ sempre, para que o limite seja nulo é preciso que $(B-A)e_i = 0$. Contudo, veja que

$$(B-A)e_i = (B-A)\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \text{a } i\text{-ésima coluna da matriz } B-A.$$

Como o índice i é arbitrário, concluímos que todas as colunas de $B-A$ são nulas e que $A = B$. □

Essa proposição, ao especificar uma única aproximação de 1ª ordem como a melhor, notadamente $[f(a) - Aa] + Ax$ permite fazermos a seguinte definição:

Se existe A tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

então:

- diz-se que f é *diferenciável* em a;
- escreve-se $f'(a) = A$, sua (*matriz*) *diferencial;*
- a função $L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ é a *melhor aproximação de 1ª ordem* de f ao redor de a.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Há várias notações para a matriz $f'(a)$.)

É importante o termo "diferenciável": ao contrário de nosso estudo para funções de uma variável, aqui "diferenciável" e "derivável" *não são a mesma propriedade!*

Exercício

Suponha $f(x) = Ax$ para uma matriz fixa A. Mostre que f é diferenciável e que $f'(a) = A$ em qualquer ponto a.

Em particular, a função identidade $f(x) = x$ (quando $m = n$) é diferenciável e $f'(a)$ é a matriz identidade.

Exercício

Se f é diferenciável em a, então é contínua em a.

Sugestão: assuma $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{\|x-a\|} = 0$, mostre $\lim_{x\to a}\big(\|x-a\|\frac{E(x)}{\|x-a\|}\big) = 0$ e use $E(x) = f(x) - f(a) - A(x-a)$.

Mas afinal, qual é a tal matriz $f'(a)$? Eis como determiná-la:

Proposição

Se f é diferenciável em a, então existem todas as derivadas parciais em a e

$$f'(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{i,j}.$$

A função matricial f' é chamada *matriz jacobiana* de f.

Exemplo

Dada $f(x,y,z) = (x^2y, x + 3\operatorname{sen} z)$, temos

$$f'(1,2,0) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 1 & 0 & 3\cos z \end{bmatrix}_{\substack{x=1\\y=2\\z=0}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Quem é $f'(a)$ nos casos $m = 1$, $n = 1$, $m = n = 1$?[a]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

As idéias centrais no raciocínio a seguir são a decomposição do limite vetorial em suas componentes e, novamente, o estudo dos casos particulares de $x \to a$ paralelamente aos eixos coordenados.

Para demonstrá-la, assuma f diferenciável em a.
Escreva $A = f'(a)$, matriz com linhas A_i.
Limite vetorial: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$
Na i-ésima componente: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_i(x) - f_i(a) - A_i(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$

Se $x = a + he_j$ com h real, temos $x \xrightarrow{h\to 0} a$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(a+he_j) - f_i(a) - A_i he_j}{\|he_j\|} = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(a+he_j) - f_i(a) - hA_{ij}}{|h|} = 0.$$

Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} \underbrace{\left(\frac{f_i(a+he_j) - f_i(a)}{h} - A_{ij} \right)}_{\text{deverá} \to 0} = 0.$$

($\frac{h}{|h|}$: ± 1)

Portanto,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(a+he_j) - f_i(a)}{h} = A_{ij}.$$

Exercício

Assuma $u \in \mathbb{R}^n$ unitário, $m = 1$ e f diferenciável. Reproduza a técnica acima para mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \overset{(1º)}{=\!=} f'(a)\cdot u \overset{(2º)}{=\!=} \langle \nabla f(a) | u \rangle.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Note que há duas coisas a mostrar nesse exercício: os itens (1º) e (2º). Ele apresenta que, no caso de funções escalares, a melhor aproximação pode ser escrita como $\Delta f \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j$, onde Δ significa "variação".

Exemplo na lousa (Guidorizzi, $n = 2$ e $m = 1$)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f não é diferenciável em $(0,0)$, mas é contínua.

Exemplo na lousa (Guidorizzi, $n = 2$ e $m = 1$)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f não é diferenciável nem contínua em $(0,0)$.

Teorema

Se todas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existem ao redor de a e são contínuas em a, então f é diferenciável em a.

Assim, basta verificar continuidade das derivadas parciais.

A recíproca não vale, como já vimos para uma variável em 167.

Sumário

- Se podemos formar $A = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)]_{i,j}$ e

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

  então f é diferenciável em a e $f'(a) = A$. (A é única candidata!)

- Se não podemos formar A, então f *não* é diferenciável em a.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

- Se podemos formar A, mas $\lim \neq 0$ ou não existe, então f *não* é diferenciável em a.
- Se f não é contínua em a, então *não* é diferenciável em a. (Não vale recíproca.)
- Se as $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são contínuas em a, então f é diferenciável em a. (Não vale recíproca.)

- $L(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ só é melhor aprox. 1ª ordem (para $m = 1$, $z = L(x)$ só é eq. plano tangente) se f é diferenciável.

(Diagrama na lousa.)

Em geral, esse diagrama esclarece que se entendem $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ como espaços tangente, a matriz $f'(a)$ como uma transformação linear entre esses espaços.

Classes de continuidade

Note que $f'(a)$ é matriz $m \times n$, ou vetor em $\mathbb{R}^{mn}$.

Se f é diferenciável em todo o D, obtemos

$$f' \colon D \to \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn},\ a \mapsto f'(a).$$

f' também é função, talvez diferenciável.

Equivalem:

- f é diferenciável k vezes & $f^{(k)}$ é contínua;
- todas der. parciais de f de ordem k existem & são contínuas.

Nesse caso, diz-se: *f é de classe C^k.*

Lembre que $f^{(k)} = f'^{\cdots\prime}$, onde o sinal $\prime$ aparece k vezes, é a k-ésima diferencial de f. O valor de k pode ser qualquer inteiro $0, 1, 2, \ldots$

A classe C^∞ compreende aquelas funções que têm todas as derivadas, de qualquer ordem; essas derivadas são forçosamente contínuas.

É essa classificação que se usa como hipótese de suavidade — geralmente C^1, C^2 ou C^∞ — para curvas, superfícies e funções em geral.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo na lousa (Guidorizzi, $n = 2$ e $m = 1$)
Retomamos

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Aparece fórmula para plano "tangente" que não é tangente.

14.2 Propriedades e teoremas

Exceto por tratarem-se, agora, de matrizes e vetores, o procedimento para derivar composições de funções escalares ou vetoriais de várias variáveis é o mesmo que estudamos para funções de uma variável: calcula-se a derivada da função mais "externa", com o mesmo argumento, multiplicando-se pela derivada desse "recheio" até exaurir a expressão.

Eis o enunciado formal:

Regra da Cadeia
Suponha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f\colon D \to E$ e $g\colon E \to \mathbb{R}^k$. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

O produto indicado é o de matrizes; posto isso, a regra é idêntica àquela para funções de uma variável e valores escalares. É preciso que a esteja no interior de D (que é também o domínio de $g \circ f$) e $f(a)$ no interior de E.

Demonstração: Assuma que valem as hipóteses dadas no enunciado e escreva $b = f(a)$, $A = f'(a)$, $B = g'(b)$. Queremos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(b) - BA(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Sabemos que

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + E_f(x) \text{ com } \tfrac{E_f(x)}{\|x-a\|} \xrightarrow{x \to a} 0 \text{ e}$$
$$g(y) - g(b) = B(y-b) + E_g(y) \text{ com } \tfrac{E_g(y)}{\|y-b\|} \xrightarrow{y \to b} 0.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Em particular, porque f é contínua em a, se fizermos $y = f(x) \xrightarrow{x\to a} f(a) = b$ temos

$$g(f(x)) - g(b) = B(f(x) - b) + E_g(f(x)) \text{ com } \frac{E_g(f(x))}{\|f(x) - b\|} \xrightarrow{x\to a} 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(b) &= B(A(x - a) + E_f(x)) + E_g(f(x)) = \\ &= BA(x - a) + BE_f(x) + E_g(f(x)). \end{aligned}$$

Agora, tomando $x \to a$, sabemos que $x \neq a$, mas é preciso ainda considerar os casos $f(x) \neq f(a)$ e $f(x) = f(a) = b$. Faremos os cálculos separadamente, mas de fato as duas situações podem ser simultâneas. Quando $f(x) = b$, já temos $E_g(f(x)) = 0$ e então

$$\frac{g(f(x)) - g(b) - BA(x - a)}{\|x - a\|} = B\frac{E_f(x)}{\|x - a\|} \xrightarrow{x\to a} 0$$

porque B induz uma função contínua. Quando $f(x) \neq f(a)$, podemos escrever

$$\frac{g(f(x)) - g(b) - BA(x - a)}{\|x - a\|} = B\frac{E_f(x)}{\|x - a\|} + \frac{E_g(f(x))}{\|f(x) - b\|} \cdot \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|}.$$

O primeiro fator do produto tende a 0 já que $y = f(x) \to f(a)$; falta então mostrar que o segundo é limitado enquanto $x \to a$.

Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|} &= \frac{\|A(x - a) + E_f(x)\|}{\|x - a\|} \leqslant \\ \leqslant \frac{\|A(x - a)\|}{\|x - a\|} &+ \frac{\|E_f(x)\|}{\|x - a\|} \leqslant \\ \leqslant \|A\| &+ \frac{\|E_f(x)\|}{\|x - a\|}; \end{aligned}$$

o segundo termo é a norma de $E_f(x)/\|x - a\|$, que vai a 0. □

Exercício

Dadas $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, com V diferenciável em $\gamma(t_0)$ e γ derivável em t_0, mostre que

$$\tfrac{d}{dt}(V \circ \gamma)(t_0) = \langle\, \nabla V(\gamma(t_0)) \mid \dot\gamma(t_0)\,\rangle.$$

Basta reescrever a regra neste caso!

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Obtemos a expressão comumente utilizada em textos científicos ao expandir o produto interno nesse exercício:

Fórmula usual

Dadas $V(x,y,z)$ e $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, seja

$$\alpha(t) = V\big(\gamma(t)\big) = V\big(x(t), y(t), z(t)\big).$$

Então

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Exemplo

Para $V(x,y) = 5y^2 - 3x^3y$ e $\gamma(t) = (\cos t, 2t^3)$ em $t = \pi$, pela regra:

$$(V\circ\gamma)'(\pi) = \underbrace{\begin{bmatrix} -9x^2y & 10y - 3x^3 \end{bmatrix}}_{(x,y)=\gamma(\pi)=(-1,2\pi^3)} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ 6t^2 \end{bmatrix}_{t=\pi} =$$

$$= \begin{bmatrix} -18\pi^3 & 20\pi^3 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6\pi^2 \end{bmatrix} = 120\pi^5 + 18\pi^2.$$

Note que calculamos $x = -1$ e $y = 2\pi^3$ a partir do valor $t = \pi$.
Vejamos os outros modos de obter o mesmo resultado:

Ou, como V é escalar e γ é curva:

$$\tfrac{d}{dt}(V\circ\gamma)(\pi) = \langle\, \nabla V(-1, 2\pi^3) \mid \dot\gamma(\pi)\,\rangle = \ldots = 120\pi^5 + 18\pi^2.$$

Ou, por substituição prévia:

$$(V\circ\gamma)(t) = 5y^2 - 3x^3y\big|_{\substack{x=\cos t\\ y=2t^3}} = 20t^6 - 6t^3\cos^3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (V\circ\gamma)'(t) = 120t^5 - 18t^2\cos^3 t + 18t^3\cos^2 t\operatorname{sen} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (V\circ\gamma)'(\pi) = 120\pi^5 + 18\pi^2.$$

A última opção para o cálculo, acima, tratou simplesmente de substituir x, y como expressões de t e derivar a função composta de uma única variável, não necessitando o passo intermediário no ponto $(-1, 2\pi^3)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Ou, pela fórmula usual:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}(V\circ\gamma) &= \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \\ &= (-9x^2y)(-\operatorname{sen} t)+(10y-3x^3)(6t^2) = \\ &= 18t^3\cos^2 t\operatorname{sen} t+120t^5-18t^2\cos^3 t\end{aligned}$$

e então

$$(V\circ\gamma)'(\pi) = 120\pi^5+18\pi^2.$$

Exercício

Dadas $V(x,y,z) = 7xy^2-(x+1)e^{2z}$ e $\gamma(t) = (t-t^2, 3t, \operatorname{sen}\pi t)$, calcule $(V\circ\gamma)'(1)$.[a]

Apresentaremos, aqui, os Teoremas das Funções Implícita e Inversa, verificando o que a Regra da Cadeia tem a dizer-nos. Lembre que, para

$$xyf(x,y)+(f(x,y))^3 = x,$$

aplicamos $\frac{\partial}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial y}$ aos dois lados e isolamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Podemos fazer o mesmo com matrizes diferenciais e os dois teoremas dão informação rigorosa a respeito:

Teorema da Função Implícita: Suponha $D\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^{n+m}$, $f\colon D\to\mathbb{R}^m$ de classe C^k e $(a,b)\in D$ com $f(a,b)=0$.

Escreva $f'(a,b) = [A\,B]$, onde A é $m\times n$ e B é $m\times m$.

Se B é invertível (como matriz) então existem bolas abertas $W\ni(a,b)$ e $U\ni a$ tais que $W\subseteq D$,

$$(\forall x\in U)(\exists! y_x\in\mathbb{R}^m)\,(x,y_x)\in W \text{ e } f(x,y_x)=0$$

(forçosamente $y_a=b$) e a função $g\colon U\to\mathbb{R}^m$, $g(x)=y_x$, é de classe C^k. □

Isso significa que, para cada valor do parâmetro x, resolve-se a equação $f(x,y)=0$ em y, obtendo-se uma única solução y_x, e sua variação com x é de classe C^k.

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada no Guidorizzi ou no Rudin.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Com $h(x) = f(x, g(x)) \equiv 0$ e $g(a) = b$, vem $h'(a) = 0$ e $h(a) = f(a, g(a)) = f(a, b)$, donde

$$h'(a) = f'(a,b)\cdot(x, g(x))'|_{x=a} = [A_{m\times n}\, B_{m\times m}]\cdot \begin{bmatrix} 1_{n\times n} \\ g'(a)_{m\times n} \end{bmatrix} = A + B\cdot g'(a).$$

Então podemos isolar $g'(a) = -B^{-1}A$.

Teorema da Função Inversa: Suponha $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Psi\colon D \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k e $a \in D$.

Escreva $A = \Psi'(a)$.

Se A é invertível (o que requer $J_\Psi(a) \neq 0$), então existem bolas abertas $U \ni a$, $V \ni \Psi(a)$ tais que $\Psi|_U\colon U \to V$ é bijeção e $\Psi|_U^{-1}\colon V \to U$ tem classe C^k. □

Φ, Ψ mudanças de coordenadas, uma inversa da outra:

- $\Phi(\Psi(x)) = x$;
- $(\Phi \circ \Psi)'(a) = 1_{n\times n}$;
- $(\Phi \circ \Psi)'(a) = \Phi'(\Psi(a)) \cdot \Psi'(a)$, donde $\Phi'(\Psi(a)) = (\Psi'(a))^{-1}$.

A título de exercício, pode-se mostrar que os dois enunciados são equivalentes, isto é, usa-se o primeiro para provar o segundo e vice-versa. Uma sugestão para a primeira implicação é trabalhar com a função $f(x, y) = x - \Psi(y)$, que é nula.

Lembre que o Teorema do Valor Médio (TVM) que estudamos em "Derivação" (quando $m = n = 1$) tem a seguinte interpretação: A taxa de variação média de uma função diferenciável ao longo de um intervalo é de fato realizada como a taxa instantânea em algum ponto no intervalo. Em termos formais:

Para uma variável (TVM)

Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

O mesmo enunciado não vale literalmente para funções de várias variáveis; estudaremos a seguir alguns contraexemplos e os resultados similares que são possíveis.

Começamos com funções vetoriais de uma única variável ($n = 1$):

Para curvas

Considere a hélice $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, t).$$

(Diagrama na lousa.)

Note que

$$\frac{\gamma(1) - \gamma(-1)}{1 - (-1)} = (0,0,1)$$

é vertical.

Mas

$$\dot\gamma(t_0) = (-2\pi \operatorname{sen} 2\pi t_0, 2\pi \cos 2\pi t_0, 1)$$

para qualquer $t_0 \in \,]-1,1[$, de modo que $\dot\gamma(t_0)$ nunca é vertical.

(O vetor tangente nunca é vertical porque seno e cosseno nunca se anulam simultaneamente.)

Outros exemplos são possíveis, como o círculo $(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ para $t \in [0,1]$ no espaço $\mathbb{R}^2$: seus pontos inicial e final são o mesmo, de modo que o deslocamento total é nulo, mas o vetor tangente nunca é nulo.

O que vale é a seguinte propriedade:

Proposição

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe $t_0 \in \,]a,b[$ tal que

$$\frac{\|\gamma(b) - \gamma(a)\|}{b-a} \leqslant \|\dot\gamma(t_0)\|.$$

A proposição indica que, no caso de uma curva (com várias voltas), o deslocamento vetorial pode ser pequeno e, justamente por isso, em algum momento a velocidade vetorial deverá ser mais alta para compensar as voltas.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Esta demonstração usa o TVM de FUV:
Tome $\varphi(t) = \langle\, \gamma(t) - \gamma(a) \mid \gamma(b) - \gamma(a) \,\rangle$. Temos:

- $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável;
- $\varphi(a) = 0$;
- $\varphi(b) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2$;
- $\dot\varphi(t) = \langle\, \dot\gamma(t) \mid \gamma(b) - \gamma(a) \,\rangle$.

Existe $t_0 \in \,]a,b[$ tal que

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} = \dot\varphi(t_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2}{b-a} &= \langle\, \dot\gamma(t_0) \mid \gamma(b) - \gamma(a) \,\rangle \leqslant \\ &\leqslant \|\dot\gamma(t_0)\| \cdot \|\gamma(b) - \gamma(a)\|.\end{aligned}$$

(Se $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = 0$ não podemos cancelar nos dois lados da inequação, mas a desigualdade é imediatamente satisfeita!)

A seguir, tratamos o caso de funções escalares (quando $m = 1$), mas de várias variáveis. Recorde a notação para segmentos de reta (pág. 253): sendo $a, b \in \mathbb{R}^n$, define-se

$$[a,b] = \{\, (1-t)a + tb \mid 0 \leqslant t \leqslant 1 \,\} = \{\, a + t(b-a) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1 \,\}.$$

Então, neste enunciado, $(1-t_0)a + t_0 b$ é um ponto alinhado entre a e b:

Para funções escalares

Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, $[a,b] \subseteq D$ e $f\colon D \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então existe $t_0 \in \,]0,1[$ tal que

$$f(b) - f(a) = \big\langle\, \nabla f\big((1-t_0)a + t_0 b\big) \;\big|\; b - a \,\big\rangle.$$

(Não podemos dividir por $b-a$, que é um vetor, então devemos tê-lo "do outro lado", multiplicando com uso do produto interno. O gradiente de f desempenha o papel da derivada.)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Demonstração: Também invocamos o TVM para funções de uma variável. Tome

$$\varphi(t) = f((1-t)a + tb);$$

note que o argumento de f é uma curva cuja derivada é sempre $b-a$. Temos:

- $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua derivável;
- $\varphi(0) = f(a)$;
- $\varphi(1) = f(b)$;
- $\dot{\varphi}(t) = \langle\, \nabla f((1-t)a + tb) \mid |b-a\,\rangle$.

Então existe $t_0 \in\,]0,1[$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = \dot{\varphi}(t_0)$ e basta, novamente, substituir as expressões nessa equação. □

Finalmente, para funções vetoriais de várias variáveis, prova-se este enunciado:

Em geral

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $[a,b] \subseteq D$ e $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Se existir $K > 0$ de modo que

$$(\forall x \in [a,b])\, \|f'(x)\| \leqslant K,$$

então

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant K\|b-a\|.$$

14.3 Polinômios de Taylor

Como em "Derivação", onde estudamos o caso de uma única variável ($n = 1$) que recordaremos a seguir, o objetivo do estudo de polinômios e séries de Taylor é obter, para uma $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, as melhores aproximações polinomiais. Podendo tratar cada componente em separado, trabalharemos com funções escalares ($m = 1$).

Para aplicações, que são inúmeras em várias ciências, deixamos a seu cargo procurá-las em sua área de interesse e em cursos de Cálculo Numérico; os exemplos que demos em "Derivação" para funções de uma variável já devem tê-lo convencido da importância do assunto.

Aqui, é importante compreender toda a formulação utilizada.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Para uma variável

Se f derivável até ordem $d+1$, melhor aprox. polinomial a f de grau d ao redor de a é

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$$

Erro cometido é dado pelo "resto de Lagrange":

$$\frac{f^{(d+1)}(\xi_x)}{(d+1)!}\,(x-a)^{d+1} \text{ para algum } \xi_x \text{ entre } a \text{ e } x.$$

Para $d = 1$, a expressão se reduz à melhor aproximação de 1ª ordem: $f(a) + f'(a)(x-a)$.

Mais variáveis alteram apenas a escrita do polinômio, mas não sua essência:

Para várias variáveis

Sejam $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f\colon D \to \mathbb{R}$ de classe C^{d+1}.

Melhor aprox. polinomial a f de grau d ao redor de a:

$$P_d(x) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{\substack{s_1+\ldots+s_n=k \\ s_1,\ldots,s_n\geqslant 0}} \frac{1}{s_1!\ldots s_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_n^{s_n}}(a) \cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^{s_i}$$

Só é preciso listar as derivadas parciais mistas com as variáveis listadas em ordem; a fórmula já calcula o total de todas as derivadas pelo Teorema de Schwarz.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

$f(x,y) = 3x^2 \operatorname{sen} y$ em $(1, \frac{\pi}{2})$, pol. grau 2 ?

Calculamos:

- $f(1, \frac{\pi}{2}) = 3$;
- $f_x = 6x \operatorname{sen} y$, donde $f_x(1, \frac{\pi}{2}) = 6$;
- $f_y = 3x^2 \cos y$, donde $f_y(1, \frac{\pi}{2}) = 0$;
- $f_{xx} = 6 \operatorname{sen} y$, donde $f_{xx}(1, \frac{\pi}{2}) = 6$;
- $f_{xy} = 6x \cos y$, donde $f_{xy}(1, \frac{\pi}{2}) = 0$;
- $f_{yy} = -3x^2 \operatorname{sen} y$, donde $f_{yy}(1, \frac{\pi}{2}) = -3$.

Então:

$$P_2(x,y) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{s+t=k} \frac{1}{s!t!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^s \partial y^t}(1, \tfrac{\pi}{2}) \cdot (x-1)^s (y - \tfrac{\pi}{2})^t =$$

$$= \underbrace{f(1, \tfrac{\pi}{2})}_{k=0} + \underbrace{f_x(1, \tfrac{\pi}{2})(x-1) + f_y(1, \tfrac{\pi}{2})(y - \tfrac{\pi}{2})}_{k=1} +$$

$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2} f_{xx}(1, \tfrac{\pi}{2})(x-1)^2 + f_{xy}(1, \tfrac{\pi}{2})(x-1)(y - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(1, \tfrac{\pi}{2})(y - \tfrac{\pi}{2})^2}_{k=2} =$$

$$= 3 + 6(x-1) + 3(x-1)^2 - \tfrac{3}{2}(y - \tfrac{\pi}{2})^2.$$

Exercício

Expanda explicitamente o polinômio de Taylor de grau 3 para f arbitrária quando $n = 2$, usando centro (a, b) e variáveis (x, y). Aplique-o à função $x^5 y^7$. [a]

Dedução extraordinária: É mais um exemplo de estudar funções de várias variáveis aproveitando o trabalho e os resultados válidos para uma variável, acompanhado de uma exposição prática sobre combinações de índices.

Tome um $\varepsilon > 0$ de modo que se possa definir $\varphi\colon\ ]0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ assim: $\varphi(t) = f(a + t(x - a))$. Como $\varphi(0) = f(a)$ e $\varphi(1) = f(x)$, bastará calcular

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

em 1 o polinômio de Taylor de $\varphi(t)$ de grau d ao redor de 0, que é

$$\sum_{k=0}^{d} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, t^k.$$

Pela Regra da Cadeia, φ é de classe C^{d+1}; escrevendo $u = x - a$, temos $\varphi(t) = f(a + tu)$. Então, denotando a i-ésima variável por x_i,

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu) \cdot u_i.$$

Derivando essa expressão, vem

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tu)\Big) \cdot u_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + tu) \cdot u_j\Big) \cdot u_i.$$

Procedemos derivando iteradamente, até obter todas as derivadas $\varphi^{(k)}$ com k de 0 até d (ou $d+1$, depois). Feito isso, podemos calcular seus valores em 0; temos, portanto,

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot u_i,$$
$$\varphi''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot u_i u_j.$$

Para expressar $\varphi^{(k)}(0)$, precisaremos k índices $i_1, \ldots, i_k$ todos em $\{1, \ldots, n\}$ e a soma a seguir é feita sobre todas as combinações de valores possíveis:

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a) \cdot u_{i_1} \ldots u_{i_k}.$$

Pelo Teorema de Schwarz, podemos reorganizar as derivadas parciais para que fiquem legíveis. Isso requer alterar a indexação feita: poremos cada combinação de $i_1, \ldots, i_k$ em ordem, como $j_1 < \ldots < j_e$ com cada um repetido, respectivamente, vezes $r_1, \ldots, r_e > 0$ vezes. Desse modo, todas as combinações possíveis são dadas pelas possibilidades de $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_e \leqslant n$ satisfazendo $r_1 + \ldots + r_e = k$. Para uma sequência específica de repetições $(r_1, \ldots, r_e)$, há $k!/r_1! \ldots r_e!$ permutações possíveis e obtemos

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum \frac{k!}{r_1! \ldots r_e!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}^{r_1} \ldots \partial x_{j_e}^{r_e}}(a) \cdot u_{j_1}^{r_1} \ldots u_{j_e}^{r_e}.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Porém, podemos especificar que índices que não ocorrem são repetidos 0 vezes e lembrar que $u_j^0 = 1$, de modo que, agora somando sobre as possibilidades de $s_1, \ldots, s_n \geqslant 0$ com soma k, temos

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum \frac{k!}{s_1! \ldots s_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}(a) \cdot u_1^{s_1} \ldots u_n^{s_n}.$$

Finalmente, basta substituir essa expressão no polinômio para φ: somar de 0 a d, cancelar $k!$ e notar $u_i = x_i - a_i$. □

O vetor $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ é conhecido como "multi-índice" e usado para simplificar a escrita de expressões como a de Taylor. Definem-se várias operações sobre s, como

- $s! = (s_1!) \times \ldots \times (s_n!)$;
- $x^s = (x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n})$ para um vetor $x \in \mathbb{R}^n$;
- $|s| = |s_1| + \ldots + |s_n|$.

Exercício extraordinário: Mostre que[a] o k-ésimo termo da soma é

$$\frac{1}{k!}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f\right]_{x=a}.$$ □

Alternativa para 2ª ordem

Para matriz $H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j}$,

$$P_2(x) =$$
$$= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) =$$
$$= f(a) + \langle \nabla f(a) | x - a \rangle + \tfrac{1}{2}(x-a)^t H (x-a).$$

Essa forma alternativa será usada no próximo capítulo, para justificar análises de máximos e mínimos. Sua demonstração consiste em entender cada uma das duas igualdades no slide.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A primeira simplesmente usa a aproximação $\varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0)$ que calculamos na dedução acima, antes de reorganizar as derivadas parciais, com os valores que obtivemos explicitamente:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f(a);\\ \varphi'(0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i - a_i);\\ \varphi''(0) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot(x_i-a_i)(x_j-a_j).\end{aligned}$$

A segunda visualiza $x - a$ como um vetor coluna: a soma de $\varphi'(0)$ é um produto interno usando o vetor gradiente e a soma de $\varphi''(0)$ pode ser reescrita como

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right](x_j-a_j).$$

Resto de Lagrange

$$\sum_{\substack{s_1+\ldots+s_n=d+1\\ s_1,\ldots,s_n\geqslant 0}} \frac{1}{s_1!\ldots s_n!}\cdot\frac{\partial^{d+1} f}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_n^{s_n}}(\xi_x)\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^{s_i}$$

para algum ξ_x no segmento $[a, x]$.

Dedução extraordinária: Basta, na dedução feita acima, também obter o resto de Lagrange de φ, cuja expressão envolve a dedução de $\varphi^{(d+1)}$ com a forma análoga. Aproximando φ em 1, mas ao redor de 0, teremos $\xi_{(\varphi)} \in]0, 1[$, de modo que o ponto $\xi_x = a + \xi_{(\varphi)}(x - a)$ estará entre a e x. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 15

Otimização

As técnicas de maximização e minimização de funções de várias variáveis inspiram-se diretamente naquelas que estudamos em "Otimização e Comportamento de Funções" para uma variável, mas têm que considerar uma variedade maior, tanto numérica quanto qualitativamente, de situações que geometricamente não ocorriam em tal caso.

De todos os espaços euclideanos, apenas a reta $\mathbb{R}$ é naturalmente ordenada, de modo que os enunciados de problemas de otimização referem-se sempre a "funções objetivo" que são escalares. Portanto, estudaremos $f\colon D \to \mathbb{R}$ (caso $m = 1$ em nossa notação) e suporemos ainda que $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado (ou seja, compacto), bastando então que f seja contínua para que assuma valores extremos.

15.1 Procedimento para duas variáveis

Começamos revisitando as definições fundamentais de otimização. Os próximos dois slides referem-se a pontos $a \in D$:

Extremos

Quando $f(a) \geqslant f(x)$ para todo $x \in D$:

- a é um *ponto de máximo global* (ou *absoluto*);
- $f(a)$ é o *valor máximo global* (ou *absoluto*).

Quando $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in D$: *mutatis mutandis.*

Domínio é importante! Fora dele, f não está definida *ou* valores maiores e menores não interessam.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fizemos as mesmas definições em "Otimização e Comportamento de Funções"; você deverá rever os comentários anexos lá. Em especial, recorde que um ponto do *domínio* poderá ser "ponto de máximo ou mínimo", já sua *imagem* poderá ser "valor máximo ou mínimo".

Por suas próprias definições, os valores máximo e mínimo são únicos sobre o domínio especificado, mas pode haver vários pontos de máximo e vários pontos de mínimo que produzam esses mesmos valores.

Quando se restringe a $V \cap D$, para alguma vizinhança V de a: *extremo local* (ou *relativo*).

Discussão sobre localidade: compare picos do Jaraguáe do Everest.

Revise também os detalhes do roteiro que aprendemos, nas páginas 185 e seguintes, para determinar os máximos e os mínimos de funções de uma variável, porque o estudo de várias variáveis seguirá a mesma linha lógica, ainda que requeira adaptações. Aqui, com $D \subseteq \mathbb{R}$, assumimos que f é o suficientemente derivável para validar cada passo:

Para uma variável

Para determinar extremos globais:

(1) Calcular f nos *pontos críticos:*

- onde f' se anula;
- onde f' não existe.

(2) Calcular f nas extremidades do domínio.

(3) Comparar esses valores.

Para determinar extremos locais interiores:

(4a) Verificar sinal de f'' *nos* pontos críticos.

(4b) Verificar sinal de f' *ao redor* dos pontos críticos.

(Lembramos que uma extremidade de D também pode ser um ponto de máximo ou mínimo local, podendo ser assim classificada a partir da avaliação do crescimento de f em seu entorno em D.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Agora, trataremos uma função-objetivo de duas variáveis. A próxima seção explicará os passos e as relações que apresentamos aqui. Embora o raciocínio seja igualmente válido para um número qualquer de variáveis, suas conclusões adquirem roupagem específica no caso de duas variáveis; *portanto, não funcionam para $n \geqslant 3$!*

Como habitual, denotamos as variáveis como x, y e um ponto de interesse como (a, b), assim como prosseguimos com $f\colon D \to \mathbb{R}$. A primeira tarefa é identificar os "pontos críticos" nesse contexto:

Para duas variáveis

Um ponto (a, b) no interior de D é *crítico* se

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$;
- ou uma das derivadas (ou ambas) não existe.

Recorde também o hessiano:

$$H_f(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix}$$

O hessiano desempenhará, aqui, papel análogo ao da segunda derivada para funções de uma variável.

Para f de classe C^2 e (a, b) crítico:
Se $H_f(a, b) > 0$, avalie:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ e/ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$: máximo local (diagrama na lousa).
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ e/ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$: máximo local (diagrama na lousa).

Com "e/ou" em cada subcaso, entendemos o seguinte: basta considerar o sinal de uma das derivadas de segunda ordem que determinamos na diagonal principal do hessiano; veremos na próxima seção que, neste caso de duas variáveis e hessiano positivo, a outra derivada tem o mesmo sinal e não é preciso contemplá-lo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Se $H_f(a,b) < 0$: ponto de sela (diagrama na lousa).
Se $H_f(a,b) = 0$: sem conclusão.

Selas são uma novidade do estudo de várias variáveis. Elas correspondem à situação em que, quando a função é restrita a uma reta no domínio, o ponto crítico é de máximo, enquanto é de mínimo para outro eixo, simultaneamente. A figura e o nome são reminiscentes das selas de cavalo, ou dos camelos de duas corcovas.

O hessiano nulo indica a necessidade de aplicar outros métodos para a correta classificação do ponto crítico, como estudar a inflexão do gráfico da função em uma vizinhança do ponto. Também pode corresponder a situações como "tobogãs" ou "calhas" (viradas para cima ou para baixo), em que o gráfico de uma função, quando restrita a uma determinada reta passando pelo ponto crítico, é horizontal. Nesse caso, o ponto crítico não é de máximo, mínimo ou sela.

Procedimento
Para f contínua sobre D fechado limitado:

(1) Determinar pontos críticos e seus f-valores.

(2) Calcular valores extremos de f na fronteira de D.

(3) Comparar esses valores.

Isso determina extremos globais.

(4) Verificar sinais de H_f e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Isso determina extremos locais e selas, quando possível.

Note que esse procedimento é muito similar àquele para funções de uma única variável, mas cada passo será realizado de modo diferente. Trataremos (2) e (4) em vários exemplos; de fato, começamos por situações em que o domínio é todo o plano $\mathbb{R}^2$, ilimitado, apenas para realizar a classificação do ponto crítico:

Exemplo na lousa
Pontos críticos de $f(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo na lousa

Pontos críticos de $f(x, y) = x^2 y^4$.

Exercício

Ache a menor distância do ponto $(12, 0, 5)$ ao plano $2x - y - z = 2$.[a]

Sugestões: minimizar a distância é minimizar seu quadrado; substitua $z = 2x - y - 2$ para trabalhar com duas variáveis x, y.

A eliminação da variável z por substituição, porque seu valor é dado pelos de x e y, é prática que trazemos dos estudos de "Uma Variável". O método de Lagrange, que estudaremos à frente, tratará z como uma terceira variável do mesmo tipo das outras duas.

Substituição maléfica: Tenha em mente que a eliminação de uma variável em uma restrição, para substituição na função-objetivo, pode dar um resultado incorreto. Eis um exemplo devido a H. R. Bailey[b]: ache a distância mínima da origem ao parabolóide $z = 4 - x^2 - 4y^2$. □

Exercício

Estude

$$f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)xy$$

no círculo

$$D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4 \,\}.$$

Atenção: todos os pontos da fronteira vão interessar!

Exemplo

Marcas de feijão preto X e Y custam ambas, no atacado, R$ 3 por saco de 1 kg. Supermercado vende por x e y reais, resp. Número de sacos vendidos por dia:

$$X : 173 - 60x + 30y$$
$$Y : 23 + 40x - 50y$$

Maximize o lucro líquido determinando x e y.

Esse exemplo é uma ilustração da relevância das preferências do consumidor na determinação dos preços ideiais para um produto. Nele, o preço

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

de cada marca afugenta alguns consumidores, seja para a concorrência, seja decidindo não comprar o produto, o que subtrai parte das vendas; por outro lado, também atrai outros consumidores da concorrência, acrescentando vendas. No enunciado, o produto tem um preço uniforme de aquisição e a diferença de preço dá-se exclusivamente em razão da preferência pela marca.

Função-objetivo é

$$f(x,y) = (x-3)(173-60x+30y) + (y-3)(23+40x-50y).$$

Derivadas primeiras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 233 - 120x + 70y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 83 + 70x - 100y$$

Sistema

$$\begin{cases} 120x - 70y = 233 \\ -70x + 100y = 83 \end{cases}$$

tem solução $x = 4{,}10$ e $y = 3{,}70$.

Matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} -120 & 70 \\ 70 & -100 \end{bmatrix}$$

tem determinante positivo e canto negativo: ponto de máximo.

Quantidades vendidas (expressões no enunciado): 38 da marca X e 2 de Y.

Lucro líquido máximo: $f(4{,}10; 3{,}70) = 43{,}20$.

(As vendas da marca X superam muito as da marca Y, porque tem maior preferência do consumidor, como mostra a própria expressão no enunciado. Desse modo, X tem "espaço" para ser mais cara que Y.)

Note que a matriz hessiana de f é constante, então é a mesma para qualquer ponto, não apenas o ponto crítico que determinamos. *Veremos na próxima seção que, mesmo fora dele,* os sinais dos subdeterminantes indicam que f tem gráfico côncavo, de modo que a imagem de qualquer ponto está abaixo da do ponto crítico. Isso nos permitirá concluir que o ponto crítico é um ponto de máximo *global* ou absoluto e, portanto, já encerrar o estudo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Porém, a título de ilustração, verifiquemos como calcular os extremos de f também na fronteira do domínio de interesse. O primeiro passo é determinar esse domínio com base nas restrições do enunciado, a saber, as duas desigualdades $x \geqslant 3$ e $y \geqslant 3$, para que os preços de venda sejam maiores que o de atacado, acrescidas de $173 - 60x + 30y \geqslant 0$ e $23 + 40x - 50y \geqslant 0$, para que as quantidades vendidas sejam positivas.

Concluímos que a fronteira do domínio consiste de três segmentos, cujas retas-suporte têm as equações $y = 3$, $y = 2x - \frac{173}{30}$ e $y = \frac{4}{5}x + \frac{23}{50}$. Ter isolado y nas equações permite-nos, em cada caso, substituí-lo na função-objetivo f e vê-la como uma função de uma variável φ, ao qual se aplicam novamente as técnicas de otimização. Assim procedendo:

- Para $y = 3$, temos $\varphi_1(x) = -60x^2 + 353x - 789$, donde $\varphi_1'(x) = -120x + 353$ anula-se em $x_1 \approx 2{,}9$. O ponto correspondente P_1 (determinado com y para tal x_1) não faz parte do segmento da fronteira, mas podemos calcular o valor máximo de φ_1, *global* porque o gráfico é uma parábola, como aproximadamente -270, muito inferior ao 43,20 já obtido.

- Para $y = 2x - \frac{173}{30}$, temos $\varphi_2(x) = -200x^2 + \frac{3838}{3} - \frac{91171}{45}$, novamente tendo gráfico parabólico com vértice em $x_2 \approx 3{,}2$, para o qual seu valor é $\varphi_2(x_2) \approx 19{,}8$, inferior ao extremo. Identificamos o ponto correspondente em P_2.

- Para $y = \frac{4}{5}x + \frac{23}{50}$, temos $\varphi_3(x) = -36x^2 + \frac{1474}{5}x - \frac{2802}{5}$ com gráfico parabólico, vértice em $x_3 \approx 4{,}0$ e valor máximo global aprox. 43,1, também inferior ao extremo (por pouco, já que a preferência é muito alta pela marca X). Identificamos o ponto em P_3.

15.2 Raciocínios e mais variáveis

Apresentaremos uma extensão a mais variáveis da classificação de pontos críticos vista na seção anterior, com justificativa.

Situação: $f\colon D \to \mathbb{R}^1$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $(\forall n)$
Importância dos pontos de fronteira — exemplos simples: uma ogiva limitada, um plano inclinado limitado. (Diagramas na lousa.)

Um exemplo cotidiano de limitação do domínio é o estudo de uma função de preços e custos: naturalmente essas variáveis estão restritas pela condição de serem não-negativas.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assim como para uma variável, os resultados sobre pontos de extremo têm a forma "se a é ponto é ponto de máximo local, então ocorre tal-e-tal situação" para a qual geralmente não vale recíproca, de modo que servem para definir os pontos críticos como *candidatos* a extremantes da função, ao incluir todos os pontos de extremo, mas não necessariamente se resumir a estes.

Suponha que a é um ponto interior de D e de máximo ou mínimo local de f. Então, para cada componente i, sua coordenada a_i é também um ponto de máximo ou mínimo local, respectivalmente, da função de uma variável g_i dada por

$$g_i(z) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, z, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Essa é a restrição de f à intersecção de D com a reta paralela ao eixo Ox_i passando pelo ponto a. Desse modo, se f é derivável, então g_i também é e $g_i'(a_i) = 0$, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Como isso vale para cada i, concluímos que a é ponto crítico.

Portanto, os pontos *críticos* são, dentre os pontos interiores de D, os únicos candidatos a extremantes locais de f. Ou seja: o candidato *interior* a precisa ter $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ para todo i, ou não existir $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ para algum i.

Agora suponha que f é de classe C^2 e que a é ponto de máximo local: analogamente ao que fizemos antes, concluímos que cada g_i também é de classe C^2 e que $g_i''(a_i) \leqslant 0$, donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \leqslant 0$ para todo i. No caso de a ser um ponto de mínimo local, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \geqslant 0$ para todo i.

Para continuarmos, usaremos a forma alternativa do polinômio de Taylor de segundo grau, que estudamos na pág. 338. Ela requer a *matriz hessiana* quadrada de ordem n

$$H = \left[\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j}$$

cujo determinante é o hessiano de f em a.

Escreva o polinômio de Taylor de ordem 2:

$$f(x) \approx f(a) + \langle\, \nabla f(a) \mid x - a \,\rangle + \tfrac{1}{2}(x-a)^t H (x-a)$$

Se a for crítico, todas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ e obtemos:

$$f(x) \approx f(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^t H (x-a)$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar © 2015 Vinicius C. L.

H é simétrica (Schwarz): existe R com $|\det R| = 1$ tal que

$$H = R^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} R.$$

Há vários modos de diagonalizar H:

- usando o "Teorema Espectral";
- calculando os "subhessianos principais" (a seguir);
- talvez já seja diagonal!

Note:

$$H_f(a) = \det H = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Teorema Espectral: Em Álgebra Linear, mostra-se que para toda matriz simétrica M, existe uma outra matriz U satisfazendo $U^t = U^{-1}$ e chamada "ortogonal" (ou "unitária") tal que UMU^{-1} é diagonal como no slide. Esses valores específicos de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os chamados "autovalores" de M. □

Obtemos

$$f(x) \approx f(a) + \tfrac{1}{2}(x-a)^t R^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} R(x-a) =$$

$$= f(a) + \tfrac{1}{2}[R(x-a)]^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [R(x-a)] =$$

$$= f(a) + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(i\text{-ésima coord. } R(x-a))^2}_{\geqslant 0}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assim:

- se todos $\lambda_i > 0$, então $f(x) \geqslant f(a)$, mínimo local;
- se todos $\lambda_i < 0$, então $f(x) \leqslant f(a)$, máximo local;
- se os sinais são variados, é uma multi-sela (convexa nuns eixos, côncava noutros);
- se existe $\lambda_i = 0$, então seu termo é 0 e o polinômio é impreciso, inconclusivo.

O caso de duas variáveis: Em particular, se $n = 2$, então $H_f(a) = \lambda_1\lambda_2$ e

- $H_f(a) > 0$ implica que λ_1, λ_2 têm o mesmo sinal, donde a é um ponto de extremo local;
- $H_f(a) < 0$ implica que λ_1, λ_2 têm sinais opostos, de modo que a é ponto de sela;
- $H_f(a) = 0$ implica ou $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$ e, então, a análise é inconclusiva.

Como também

$$H_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)^2,$$

vemos que se $H_f > 0$ então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)^2 \geqslant 0,$$

donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ têm o mesmo sinal, bastando verificar apenas um, mas se $H_f \leqslant 0$ então essas derivadas podem ou não ter mesmo sinal. Isso justifica o critério que apresentamos na seção anterior.

Note ainda que se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geqslant 0$ então f restrita ao eixo Ox, como função de uma variável, tem concavidade para cima; sendo o mesmo quanto ao eixo Oy, conclui-se que o gráfico de f ao redor de a tem o aspecto de uma ogiva invertida com ponto mais baixo sobre a; no caso negativo, a convexidade em ambos os eixos impõe que o gráfico seja uma ogiva para cima, com ponto mais alto sobre a. □

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Mesmo se a não é crítico, a avaliação do hessiano e dos autovalores permite deduzir informação sobre o gráfico de f como a orientação de sua concavidade ou seu caráter de sela. Isso porque a comparação entre $f(x)$ e $f(a)$, acima, indica se $\mathrm{Gr}(f)$ fica acima ou abaixo de seu plano tangente passando por $(a, f(a))$.

Exemplo

Central de distribuição remeterá quantidades x, y, z do mesmo produto a três lojas separadas X, Y, Z, resp. Preços variam conforme oferta:

$$X\colon 100 - 2x$$
$$Y\colon 180 - 3y$$
$$Z\colon 160 - 5z$$

O preço no atacado foi 60 por unidade. Maximize o lucro líquido determinando x, y, z.

Função-objetivo é

$$f(x, y, z) = (100 - 2x - 60)x + (180 - 3y - 60)y + (160 - 5z - 60)z.$$

Derivadas primeiras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 40 - 4x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 120 - 6y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 100 - 10z$$

Sistema tem solução $x = 10$, $y = 20$ e $z = 10$.

Lucro líquido máximo: $f(10, 20, 10) = 900$.

Matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

é diagonal com entradas negativas: ponto de máximo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Para matrizes hessianas não-diagonais, utilizaremos a metodologia a seguir.

Subdeterminantes principais

Exemplo: suponha

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Defina

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = 4,\ D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -17,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 47,\ D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 378.$$

(Definição análoga para ordem n maior ou menor.)

(Não confunda a notação do determinante 1×1 com a de módulo: o sinal do número deve ser preservado!)

Existe R com $|\det R| = 1$ tal que

$$M = R^t \begin{bmatrix} D_1 & & & & 0 \\ & D_2/D_1 & & & \\ & & D_3/D_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_n/D_{n-1} \end{bmatrix} R.$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

No exemplo:

$$M = R^t \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -47/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 378/47 \end{bmatrix} R.$$

Subhessianos principais

Com cada $\lambda_i = D_i/D_{i-1}$, observamos:

- Mínimo local:

$$\begin{aligned} &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow D_1, (D_2/D_1), (D_3/D_2), \ldots, (D_n/D_{n-1}) > 0 \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n > 0 \end{aligned}$$

- Máximo local:

$$\begin{aligned} &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow D_1, (D_2/D_1), (D_3/D_2), \ldots, (D_n/D_{n-1}) < 0 \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0, \ldots \end{aligned}$$

- Multi-sela: sinais variados em outro padrão;
- Inconclusivo: se algum $D_i = 0$, o que impede a diagonalização.

15.3 Mínimos quadrados

Em diversos problemas, temos objetivado minimizar uma distância entre pontos ou figuras geométricas. Ao fazê-lo, naturalmente utilizamos a distância euclideana

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \ldots},$$

dada pelo Teorema de Pitágoras. Como a raiz complica as derivações de d, observamos que minimizar d é equivalente a minimizar d^2 e operamos

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

diretamente com a soma de quadrados resultante, ou seja, "minimizamos os quadrados".

Esta seção apresenta o método dos mínimos quadrados como um procedimento geral, para determinar os parâmetros definidores de uma função, curva ou superfície que melhor se ajuste a pontos dados. Aqui, consideramos apenas os aspectos do método que podem ser imediatamente alcançados pelas ferramentas de otimização do Cálculo, relegando uma discussão completa à Álgebra Linear, que dispõe do conceito de projeção e trabalha distâncias com maior destreza, servindo-se de representação matricial.

Objetivo: ajustar função $y = \varphi(x)$ a dados experimentais (a_i, b_i).
Método: minimizar diferença entre valores esperados e experimentais:

$$f = \sum_i [\varphi(a_i) - b_i]^2.$$

Os parâmetros de φ são nossas variáveis.

Outra possibilidade para justificar o método é considerar a variância como é definida em um curso básico de Estatística. De fato, para uma média $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, podemos pensar no erro ou "desvio" cometido ao substituir cada x_i por $\bar{x}$ e, depois, no erro total. Este pode ser definido de vários modos:

- A soma dos desvios $\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})$ é sempre nula e, portanto, não tem serventia.
- Tomando os desvios em valor absoluto, sua soma $\sum_{i=1}^{k}|x_i - \bar{x}|$ é positiva, exceto precisamente quando $x_1 = \ldots = x_k$. Contudo, o módulo é uma função difícil de derivar.
- Uma função semelhante ao módulo é o quadrado, cuja derivada tem uma expressão simples. Novamente, $\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2$ é positiva, exceto se $x_1 = \ldots = x_k$.

Esse último erro, portanto, é operacionalmente mais prático e chamado de *variância;* sua raiz quadrada é o *desvio padrão* e tem a mesma dimensão dos dados.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exemplo

Encontrar a reta $y = mx + k$ que melhor aproxima os pontos $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(5, 3)$, $(7, 4)$.

Atenção: m, k são variáveis.

Função-objetivo:

$$f(m, k) = \sum_{i=1}^{4} [(ma_i + k) - b_i]^2$$

Derivadas primeiras deverão ser nulas:

- $\dfrac{\partial f}{\partial m} = \sum_{i=1}^{4} 2a_i(ma_i + k - b_i) = 0$; cancelaremos fator 2, donde

  $1(m1 + k - 2) + 3(m3 + k - 3) + 5(m5 + k - 3) + 7(m7 + k - 4) = 0;$

- $\dfrac{\partial f}{\partial m} = \sum_{i=1}^{4} 2(ma_i + k - b_i) = 0$; cancelaremos fator 2, donde

  $(m1 + k - 2) + (m3 + k - 3) + (m5 + k - 3) + (m7 + k - 4) = 0.$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} 84m + 16k = 54 \\ 16m + 4k = 12 \end{cases}$$

com solução $m = 3/10$ e $k = 9/5$, então a reta é $y = \frac{3}{10}x + \frac{9}{5}$. (Figura na lousa.)

Existe fórmula fechada para retas de regressão (exercício).

Verifique o caráter de mínimo do ponto de extremo, calculando o hessiano:

$$H_f = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} 2a_i^2 & \sum_{i=1}^{4} 2a_i \\ \sum_{i=1}^{4} 2a_i & \sum_{i=1}^{4} 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 336 & 64 \\ 64 & 16 \end{vmatrix}.$$

O próximo exemplo altera a forma da função a ser ajustada, para que a função-objetiva seja mais simples. Usamos o índice i entre 2 e 6, refletindo a ordenação natural dos planetas, e seguimos a tradição histórica em omitir

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Mercúrio. (Com dados um pouco mais precisos, já é possível observar o desvio relativístico desse planeta em relação à astronomia kepleriana.)

Exemplo

Sendo T o período da órbita e R o raio, qual é a curva $T = xR^y$ que melhor aproxima estes dados? ($x, y > 0$ parâmetros a determinar.)

planeta	i	R_i	T_i
Vênus	2	0,7	0,6
Terra	3	1,0	1,0
Marte	4	1,5	1,9
Júpiter	5	5,2	11,9
Saturno	6	9,5	29,5

Função-objetivo:

$$f_1(x, y) = \sum_{i=2}^{6} (xR_i^y - T_i)^2$$

Equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \displaystyle\sum_{i=2}^{6} 2(xR_i^y - T_i)R_i^y = 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \displaystyle\sum_{i=2}^{6} 2(xR_i^y - T_i)xR_i^y \ln R_i = 0 \end{cases}$$

são difíceis de trabalhar.

Aplique logaritmo a $T = xR^y$:

$$\ln T = \ln x + y \ln R = u + y \ln R \text{ linear em } u, y,$$

onde $u = \ln x$ e trabalharemos com (u, y).

Nova função-objetivo:

$$f(u, y) = \sum_{i=2}^{6} (u + y \ln R_i - \ln T_i)^2$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Agora seguimos o mesmo procedimento. As equações de ponto crítico formam este sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \displaystyle\sum_{i=2}^{6} 2(u + y\ln R_i - \ln T_i) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \displaystyle\sum_{i=2}^{6} 2(u + \ln R_i - \ln T_i)\ln R_i = 0 \end{cases}$$

Eliminando os fatores comuns 2 e substituindo T_i, R_i dados, com o auxílio de uma calculadora, obtemos:

$$\begin{cases} 5u + 3{,}95y = 5{,}99 \\ 3{,}95u + 8{,}08y = 12{,}14 \end{cases}$$

Já ao escrevê-lo, fizemos diversos arredondamentos; há outros na solução dada por $u = 0{,}02$ e $y = 1{,}49$; também ao calcularmos $x = e^u = 1{,}02$.

Novamente, devemos conferir os sinais do hessiano e da derivada segunda, para determinar que o ponto encontrado é de mínimo:

$$H_f = \begin{vmatrix} 10 & 2\sum_{i=2}^{6} \ln R_i \\ 2\sum_{i=2}^{6} \ln R_i & 2\sum_{i=2}^{6} (\ln R_i)^2 \end{vmatrix} = 4(5 \times 8{,}08 - (3{,}95)^2).$$

Resolvemos o sistema das primeiras derivadas nulas: $u = 0{,}02$ e $y = 1{,}49$.

Então $x = e^u = 1{,}02$ e $T = 1{,}02R^{1{,}49}$.

Note que a função $T(R)$ não tem $T(1) = 1$, mas quase.

Kepler concluiu que T^2/R^3 é constante, o que corresponde a $y = 1{,}50$.

15.4 Otimização condicionada

Aqui, trataremos as situações de otimização que envolvem condições sobre as variáveis, conhecidas como "restrições" na pesquisa operacional, e que se expressam através de equações. Exemplos diversos envolvem a alocação de um capital dado, distribuindo-o em vários fundos ou custos, mas cujo total deve ser mantido; também pode ser o caso de um total de produção, dentre os diversos fornecedores, mantido constante por um cartel, como a OPEP, ou a distribuição de salário dentro de um mercado de trabalho finito e inexpansível, como uma guilda.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

De interesse teórico, também, é a possibilidade de utilizarmos este método para resolver um passo do procedimento anterior, irrestrito, em que se devia determinar máximos e mínimos sobre a fronteira de um domínio, potencialmente dada por uma equação.

Objetivo: maximizar/minimizar f sobre *domínio*

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = C \,\},$$

onde $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $C \in \mathbb{R}$ (é superfície de nível).

Exemplo: achar extremos de f sobre uma fronteira.

Assumiremos f, g de classe C^1 (derivadas parciais contínuas).

Trataremos, no final desta seção (pág. **??** e seguintes), da generalização do método para um *sistema* de restrições, dado por uma equação vetorial $g(x) = C$ com $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $C \in \mathbb{R}^m$.

Procedimento

(1) Verificar onde $\nabla g(x)$ anula-se no domínio e calcular f.

(2) Escrever o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla g(x) \\ g(x) = C \end{cases}$$

($n+1$ equações e variáveis).

(3) Resolver para $x_1, \ldots, x_n, \lambda$: importante λ existir!

(4) Comparar f-valores.

Tanto os pontos x onde $\nabla g(x) = 0$ como aqueles x obtidos do sistema (que *não* é linear) são todos candidatos a extremos de f.

A nova variável λ é o que se chama *multiplicador de Lagrange*. É importante determinar o valor de λ explicitamente, tanto para conferir a validade da solução calculada, como no cálculo de variação que aprenderemos abaixo.

Note bem que esse método não permite classificar os pontos obtidos: podem ser de máximo, de mínimo ou de sela; de fato, se f está definida fora daquela superfície de nível de g, os pontos sequer precisam ser críticos. Para

Preliminar ©2015 Vinicius C.L.

determinar seu caráter corretamente, é preciso fazer uma análise suplementar, por exemplo, esboçando o gráfico de f ou calculando alguns de seus valores em uma vizinhança do ponto.

Geometricamente: suponha a ponto de extremo.
A superfície de nível

$$\{\, x \mid f(x) = f(a) \,\}$$

é a última a intersectar a superfície de nível

$$\{\, x \mid g(x) = C \,\}.$$

(Diagrama na lousa.)
Então $\nabla f(a) \parallel \nabla g(a)$.

Veremos os detalhes desta justificativa abaixo, na pág. **??** e seguintes, para restrições vetoriais.

Exemplo
Ache novamente a menor distância do ponto $(12, 0, 5)$ ao plano $2x - y - z = 2$.
Temos:

- $f(x, y, z) = (x - 12)^2 + y^2 + (z - 5)^2$;
- $g(x, y, z) = 2x - y - z$;
- $C = 2$.

$\nabla g(x, y, z) = (2, -1, -1)$ nunca zera.
$\nabla f(x, y, z) = (2x - 24, 2y, 2z - 10)$; sistema

$$\begin{cases} 2x - 24 = \lambda 2 \\ 2y = \lambda(-1) \\ 2z - 10 = \lambda(-1) \\ 2x - y - z = 2 \text{ (Não esqueça! Pto. no plano/domínio!)} \end{cases}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Solução por eliminação (use $\lambda = -2y$, $z = y + 5$):

$$x = 19/3,\ y = 17/6,\ z = 47/6,\ \lambda = -17/3.$$

É a única solução: não há 4º passo.

Variação do extremo

Valor extremo $V = f(a)$ depende da constante C.

Heuristicamente, $\Delta V \approx \lambda \cdot \Delta C$.

Desse modo, λ é o *ganho marginal* da função-objetivo, quando se altera a constante em uma unidade.

De fato, como V depende de C, podemos calcular, pela Regra da Cadeia e substituindo o sistema de Lagrange,

$$\frac{dV}{dC} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dC} = \sum_{j=1}^{n} \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dC} = \lambda \cancel{\frac{dg}{dC}}^{1 \text{ porque } g=C}.$$

Basta, então, relembrar a fórmula da melhor aproximação linear de V como função de C para obter a aproximação de sua variação no slide.

Exemplo na lousa

Se x é gasto em maquinário e y em funcionários, uma fábrica tem produtividade $12x^{2/6}y^{2/3}$. Como alocar capital de 60 unidades de modo a maximizar a produção?[a] Qual é esse máximo?[b] Quanto seria aprox. essa produtividade, com um capital de 62 unidades?[c]

Note os expoentes fracionários cuja soma é 1, o que facilita algumas passagens da resolução. Essa é uma característica das funções-produção de Cobb–Douglas.

Na última questão, *não recalcule o ponto de extremo e a função-objetivo,* apenas utilize a heurística apresentada, que é mais simples de calcular.

Já conhecemos o exercício seguinte de "Uma Variável", na pág. 191, onde também o resolvemos por eliminação de uma variável:

Exercício

Minimize o custo do material para fabricar uma lata cilíndrica de metal (com base e tampa) de volume $800\,\mathrm{cm}^3$. Quais as dimensões da lata?[d]

(Custo é proporcional à superfície.)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Exercício

Um garoto dispõe de R$ 1350 para comprar x filmes (R$ 45 cada) e y jogos (R$ 75 cada). Seu pai sugere que ele otimize sua satisfação com os produtos que comprar, otimizando a função utilidade xy. Quais são as quantidades ótimas a comprar?[c]

Exercício

Minimize

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

com $x, y, z > 0$, dado $xyz = V$ constante.[a]

Exercício

Dados $x_1, \ldots, x_n > 0$, temos as médias:

- aritmética $A = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$;
- geométrica $G = (x_1 \ldots x_n)^{1/n}$;
- harmônica $H = n(x_1^{-1} + \ldots + x_n^{-1})^{-1}$.

Mostre que $H \leqslant G \leqslant A$.[b]

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Capítulo 16

Integrais Paramétricas e os Teoremas de Stokes

Este capítulo introduz as integrais de linha e de superfície para uma primeira aula, em que se enunciem e motivem, mas não se demonstrem, os Teoremas da Divergência e de Green, Gauss e Stokes, no plano ou no espaço tridimensional. Nosso objetivo, portanto, é proporcionar ao estudante um preâmbulo à disciplina de Cálculo Vetorial formulado na linguagem que já desenvolvemos.

Tanto as definições de integral como os teoremas são generalizados, em Geometria Diferencial e de Variedades, em noções de "forma" e de sua integral e no Teorema de Stokes. Pretendemos apenas apresentar as integrais de linha e de superfície como manifestações de uma mesma idéia.

16.1 Integrais de linha

Faremos bom uso de curvas parametrizadas: em "Derivação Espacial", quando introduzimos as curvas, vimos algumas parametrizações importantes. Já ao comentar sobre segmentos de reta em "Os Espaços Euclideanos" (pág. 253), implicitamente formulamos uma parametrização para o segmento de reta de um ponto a a outro ponto b:

$$(1-t)a + tb \text{ com } t \in [0,1].$$

Outras parametrizações são possíveis e podem ser mais simples dependendo dos pontos envolvidos, como veremos em alguns cálculos.

Quando uma curva é descrita por uma equação, procure isolar uma variável univocamente e parametrize a outra simplesmente como t. Por exemplo,

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

dada a parábola $2x - y + 5y^2 = 0$, para parametrizá-la de $(-3, -1)$ a $(-2, 1)$, isole $x = \frac{1}{2}(y - 5y^2)$ e imponha $y = t$, de modo que a curva é

$$\big(\tfrac{1}{2}(t - 5t^2), t\big) \text{ com } t \in [-1, 1].$$

Note que outra parametrização possível é

$$(t - 10t^2, 2t) \text{ com } t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}];$$

outra ainda é

$$(11t - 10t^2 - 3, 2t - 1) \text{ com } t \in [0, 1],$$

obtida substituindo-se t por $t - \frac{1}{2}$ na anterior.

Os livros de Cálculo trazem exercícios de integrais de linha onde é preciso, antes de mais nada, parametrizar as curvas descritas. Pratique-os!

Suponha:

- um domínio aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$;
- uma curva $\gamma\colon [a, b] \to D$ de classe C^1 por partes (isto é, C^1 exceto em um número finito de pontos;
- um campo escalar $f\colon D \to \mathbb{R}$ contínuo.

Queremos calcular a área da folha cilíndrica (no caso de γ planar) com altura $f(x)$ no ponto x. (Figura na lousa.)

A *integral de linha de f ao longo de γ* é:

$$\int_\gamma f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

A integral no membro direito da equação é uma integral como em "Uma Variável" e seu integrando é o produto da altura $f\big(\gamma(t)\big)$ no ponto $\gamma(t)$ pelo elemento de base $\|\gamma'(t)\|$. Outro modo de ver a fórmula é como uma generalização daquela de comprimento de curva, especificando uma densidade pontual f no contradomínio da curva; a mesma abordagem será usada com integrais de superfície.

Há várias notações para integrais de linha, como

$$\int_a^b f(\gamma)\, d\gamma \quad \text{ou} \quad \int_g amma(f\, dx + g\, dy + h\, dz) \quad \text{etc.},$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

usando ou não o símbolo $\oint$ especialmente quando a curva γ é *fechada,* isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Aqui, a notação que adotamos é compatível com a de integrais múltiplas e não se confunde com a segunda, se lembrarmos que γ não é um domínio de integração, mas uma função.

Nos próximos exemplos, dedicamo-nos apenas a montar as integrais correspondentes e concretizá-las como integrais definidas de uma variável, sem nos ater a seu cálculo ou valoração:

Exemplos

- $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ ao longo do círculo de centro $(0,0)$ e raio 1, no sentido anti-horário:

$$\begin{aligned}\int_{(cost,\operatorname{sen} t)_0^{2\pi}} f(x,y)\, d(x,y) = \\ = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \operatorname{sen} t)\, \|(-\operatorname{sen} t, \cos t)\|\, dt = \\ = \int_0^{2\pi} e^{cost} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t)) \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \dots\end{aligned}$$

- $\gamma(t) = (e^t, 3t, t^2)$ para $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma (4x+5y)\, dx + (7x-2z)\, dy + 11y\, dz = \\ = \int_0^1 [(4x+5y)\dot{x} + (7x-2z)\dot{y} + 11y\dot{z}]\, dt = \\ = \int_0^1 [(4e^t+15t)e^t + (7e^t - 2t^2)3 + 33t \cdot 2t]\, dt = \dots\end{aligned}$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Dois exemplos importantes

Dado campo vetorial $F\colon D \to \mathbb{R}^n$, podemos formar f de dois modos (entre outros):

- *integral de F ao longo de γ:*

$$\int_a^b \big\langle\, F\big(\gamma(t)\big) \;\big|\; \gamma'(t) \,\big\rangle\, dt$$

  é o trabalho exercido pela força F no deslocamento sobre γ;

- *integral de F ortogonal a $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ planar:*

$$\int_a^b \big\langle\, F\big(\gamma(t)\big) \;\big|\; \big(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)\big) \,\big\rangle\, dt$$

  é a passagem do fluxo F através da fronteira γ.

Notações sugestivas para essas integrais são, respectivamente, $\int_\gamma F\, ds$ e $\int_g amma\langle F|\vec{n}\rangle\, ds$, em que $\vec{n}$ indica o campo normal a γ em cada ponto.

Exemplo

Integrar $F(x,y) = (xy, x-y)$ ao longo do triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,3)$, no sentido anti-horário: faz-se por partes, ao longo dos três lados.

Lado $(0,0)$ a $(2,0)$ é a curva $\gamma(t) = (t,0)$ com $t \in [0,2]$:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_0^2 \langle F(t,0)|(1,0)\rangle\, dt = \int_0^2 \langle (0,t)|(1,0)\rangle\, dt = 0$$

Lado $(2,0)$ a $(0,3)$ é a curva $\delta(t) = (2-t, 3t/2)$ com $t \in [0,2]$:

$$\begin{aligned}\int_\delta F\, ds &= \int_0^2 \langle F(2-t,3t/2)|(-1,3/2)\rangle\, dt = \\ &= \int_0^2 \langle (3t - 3t^2/2, 2 - 5t/2)|(-1,3/2)\rangle\, dt = \\ &= \int_0^2 (-3t + 3t^2/2 + 3 - 15t/4)\, dt = -7/2\end{aligned}$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Lado $(0,3)$ a $(0,0)$ é a curva $\varepsilon(t) = (0, 3-t)$ com $t \in [0,3]$:

$$\int_\varepsilon F\,ds = \int_0^3 \langle F(0,3-t)|(0,-1)\rangle\,dt =$$
$$= \int_0^3 \langle (0,t-3)|(0,-1)\rangle\,dt = \int_0^3 (3-t)\,dt = 9/2$$

Finalmente, a integral sobre o triângulo é

$$\int_\gamma F\,ds + \int_\delta F\,ds + \int_\varepsilon F\,ds = 0 - 7/2 + 9/2 = 1.$$

16.2 Teoremas da divergência e de Green no plano

16.3 Integrais de superfície

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Anexos

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Apêndice A

Quesitos de Matemática Escolar

A.1 Símbolos e alfabetos

Letras decoradas Geralmente se usam, em Matemática, letras itálicas maiúsculas ou minúsculas (Aa). Obviamente, convém distinguir entre maiúsculas e minúsculas na escrita manual. Em Cálculo, há uma tendência (e apenas tendência) em usar letras do começo do alfabeto para indicar parâmetros e do final para variáveis.

Porém, essas letras não são suficientes para todas as ocasiões; por isso, recorremos frequentemente ao alfabeto grego (veja a seguir) e a outros tipos de letra, como as curvilíneas ($\mathcal{ABC}$) e as vazadas ($\mathbb{ABC}$). Elas podem ser usadas para indicar objetos especiais ou complexos, como conjuntos de conjuntos ("famílias" ou "classes") e funções entre eles.

Embora certas convenções variem com o autor, as letras vazadas são rotineiramente utilizadas pelos matemáticos modernos para indicar os conjuntos numéricos, assim: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Contudo, neste guia, usamos símbolos especialmente desenhados:

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C},$$

que são mais parecidos com o que você se habituou na lousa da escola. Em apostilas escolares, costumam aparecer $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, etc.

Há muitos outras fontes, isto é, tipos de letra, em uso nas diversas áreas da Matemática. Algumas podem ser difíceis de reconhecer, como Fraktur ($\mathfrak{GHJ}$) e as caligráficas ($\mathscr{QRS}$). Não se preocupe com isso neste ciclo de cursos.

Enfim, para indicar ou facilitar algumas associações, apor acentos às

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

letras pode ser necessário ou ainda melhor do que alocar outras letras. A linha (f') já é sua conhecida, assim como a flecha ($\vec{v}$). Também se podem usar a barra ($\bar{x}$), o circunflexo ($\widehat{x}$, realmente se lê "xis-chapéu"), o til ($\widetilde{x}$) e até alguns pontinhos ($\ddot{x}$). Não se surpreenda (ou ache engraçado) que essas decorações sejam utilizadas com letras que comumente não são acentuadas.

Índices Mesmo essa variedade de fontes não dá conta das necessidades do usuário de Cálculo, porque freqüentemente precisamos dispor de uma grande quantidade de símbolos que estejam relacionados.

Assim, podemos indicar um vetor do espaço tridimensional como uma tripla (x, y, z) em coordenadas cartesianas, mas para descrever um vetor com 20 componentes — como é necessário, por exemplo, em Otimização Linear —, concorde que é mais conveniente escrever

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20})$$

do que

$$(x, y, z, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q),$$

mesmo que o menor comprimento tipográfico pareça melhor, afinal algumas dessas letras já estarão "ocupadas" com outras variáveis, ou serão de uso tradicionalmente diverso.

Cada índice n, portanto, descreve um número ou objeto x_n diferente; diz-se que x_n é a *n-ésima* (lê-se "enésima") coordenada do vetor dado — ou, em geral, o n-ésimo elemento de alguma enumeração —, onde se comete um abuso de linguagem em associar o índice ao sufixo "ésimo" de palavras como vigésimo ou centésimo.

Certas convenções seguem-se naturalmente do uso de índices: O vetor acima pode ser mais concisamente apresentado como

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{19}, x_{20}), \text{ ou mesmo } (x_1, \ldots, x_{20})$$

e, em alguns estudos mais avançados, como $(x_n \mid 1 \leqslant n \leqslant 20)$, ou $(x_n)_{1 \leqslant n \leqslant 20}$, ou simplesmente (x_n) se o intervalo de inteiros onde n varia estiver claro e fixado. Até mesmo a quantidade de coordenadas pode ser uma variável ou incógnita, ou simplesmente uma constante com que se prefere trabalhar abstratamente, caso em que se escreve

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

para o vetor que tem k coordenadas. Tratando-se de seqüências, apresentamos uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como

$$(s_0, s_1, \ldots, s_{20}, \ldots, s_{1\,\mathrm{mol}}, \ldots),$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

onde as reticências finais indicam que a seqüência tem uma entrada para cada número natural.

Na parte de "Várias Variáveis" deste texto, adotamos, como alguns outros autores, a "indexação automática" que chamará de x o vetor acima e, reciprocamente, dado um outro vetor a, imediatamente será a_n sua n-ésima entrada.

Observamos que também se pratica indexação dupla ou tripla e mesmo indexação de índices. Assim, podem-se encontrar letras indexadas como

$$g_{ijk} \text{ ou } \Delta_{n_k}.$$

No primeiro caso, para cada valor de cada índice i, j e k, teremos um objeto diferente g_{ijk}: por exemplo, uma matriz A consiste de uma entrada A_{ij} para cada i-ésima coluna e j-ésima linha. (Geômetras preferem escrever A_i^j, onde a operação com j *não* é uma potenciação, mas não fazemos isso aqui!) Já a segunda construção é uma maneira de destacar um índice específico n_k, dentre vários, e então o objeto indexado por ele.

Finalmente, índices não estão circunscritos a números naturais: qualquer conjunto I, a que se dê uma estrutura adequada, pode servir para indexar uma família de objetos X_i, um para cada $i \in I$.

O alfabeto grego Em Cálculo, você deve ser capaz de reconhecer estas minúsculas:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \theta,\ \lambda,\ \pi,\ \varphi,\ \chi,\ \omega.$$

Algumas delas têm significado específico ou dependente de contexto, mas mesmo esse significado (como π) pode ser sobrescrito. Com prática, você conhecerá todo o alfabeto. A seguinte versão é a tradicionalmente utilizada em Matemática:

A	α	(alfa)
B	β	(beta)
Γ	γ	(gama)
Δ	δ	(delta)
E	ε, ϵ	(épsilon)
Z	ζ	(zeta)
H	η	(eta)
Θ	θ	(teta)

I	ι	(iota)
K	κ	(kapa)
Λ	λ	(lambda)
M	μ	(mi)
N	ν	(ni)
Ξ	ξ	(csi)
O	o	(ômicron)
Π	π	(pi)

P	ρ	(rô)
Σ	σ	(sigma)
T	τ	(tau)
Υ	υ	(úpsilon)
Φ	ϕ, φ	(fi)
X	χ	(ki)
Ψ	ψ	(psi)
Ω	ω	(ômega)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(Não se acanhe em pedir ajuda para aprender a escrever manualmente essas letras.) Raramente se usam as letras que tenham o mesmo desenho que letras latinas. Veja que algumas letras têm duas minúsculas; qual usar depende do autor ou é questão de tradição. Também existem mais letras e variantes adotadas em outras ciências.

O símbolo de pertinência $\in$ é originado na letra ϵ, mas não é essa letra. Os símbolos de somatória $\sum$ e produto $\prod$ são desenhos específicos das letras Σ e Π.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Apêndice B

Formalismo das Variáveis Aleatórias

B.1 Variáveis aleatórias

Tópico opcional de Probabilidade.

Exemplo da teoria de funções. Conceitos importantes sobre demonstrações e conjuntos.

Um *espaço de probabilidade* é uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como se segue:

Ω é um *espaço amostral,* conjunto não-vazio de *resultados possíveis* de um experimento ou sorteio.

Fixado $\Omega \neq \emptyset$, o *conjunto de eventos* $\mathcal{F}$ satisfaz:

(1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, isto é, os elementos de $\mathcal{F}$ são subconjuntos de Ω;

(2) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;

(3) se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{F}$;

(4) se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c = \complement_\Omega A \in \mathcal{F}$.

(O conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ contém, como elementos, precisamente todos os subconjuntos de Ω. Se Ω é finito, quantos elementos tem $\mathcal{P}(\Omega)$? Nomes para ele são *conjunto potência e conjunto das partes.*)

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

(O complemento de um conjunto sempre é tomado em relação a um superconjunto "universo" — aqui, o espaço amostral Ω — que precisa ser explicitado logo de início!)

Toda família $\mathcal{F}$ satisfazendo as propriedades acima é chamada *álgebra de Boole sobre* Ω e diz-se "fechada sob intersecções e uniões (binárias)". Em geral, pede-se que $\mathcal{F}$ seja uma *σ-álgebra,* isto é, seja fechada sob intersecções e uniões de conjuntos indexados pelos números naturais, assim: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Vemos essas uniões ao tratar de topologias.

Pensando em cada ponto de Ω como um possível resultado de um experimento, os subconjuntos de $\mathcal{F}$ são os eventos de interesse a que esse resultado pode pertencer. Quando Ω é finito (o conjunto das seis faces de um dado honesto, por exemplo), podemos delimitar cada resultado como um evento unitário. Quanto Ω é contínuo (o intervalo de instantes de tempo entre 12:00 e 15:00, por exemplo), é mais simples dizer em que subconjunto (intervalos entre as horas cheias, digamos) o resultado aparece.

Exercício

Usando (1), (2) e (3), mostre que (4) equivale a "se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \smallsetminus B \in \mathcal{F}$".

Exercício

Verifique que cada família abaixo satisfaz (1)–(4):

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$;
- $\mathcal{F} = \{\, A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A \text{ ou } \Omega \smallsetminus A \text{ é finito} \,\}$.

Para mostrar uma equivalência (no primeiro exercício), mostre que uma propriedade implica a outra e não esqueça a recíproca! Quais são as duas coisas a mostrar? Agora, observe que $A \smallsetminus B = A \cap B^{\mathrm{c}}$, mas quando $A, B \in \mathcal{F}$ então também $B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ por (4) e, assim, $A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ por (3). Tente fazer a recíproca.

No caso de σ-álgebras, a última família (no segundo exercício) deve ser substituída por $\mathcal{F} = \{\, A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A \text{ ou } \Omega \smallsetminus A \text{ é enumerável} \,\}$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Fixados Ω e $\mathcal{F}$ como acima, a *medida de probabilidade* $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ satisfaz:

- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;
- se $A, B \in \mathcal{F}$ então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Assim, a função P é uma *medida aditiva* e indica a "medida" ou "tamanho" do evento considerado. Subtraímos $P(A \cap B)$ porque contamos $A \cap B$ duas vezes ao considerar A e B separadamente; pense nisso em termos de uma contagem de elementos. O conjunto vazio tem medida 0 e o espaço todo Ω tem medida 1, ou seja, 100% de chances. É perfeitamente possível ter conjuntos não-vazios com medida 0 e, então, seus complementos têm medida 1 apesar de não serem completos. Por exemplo, que medida você daria para o "intervalo perfurado" $[0,1] \smallsetminus \{\frac{1}{2}\}$? (Reescreva-o como união de dois intervalos.)

Quando $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra, exige-se que P seja *σ-aditiva,* isto é, satisfaça $P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ quando esses A_n são dois a dois disjuntos.

Exercício

Assumindo sempre (1), mostre que (2) equivale a "se $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \cap B = \emptyset$ então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ ".$$

Novamente, há duas direções ou implicações a mostrar! Quais são elas?

Uma *variável aleatória* é uma função $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(\forall k \in \mathbb{R})\, \{\, \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant k \,\} \in \mathcal{F}.$$

Nosso interesse, aqui, é entender a expressão "variável aleatória". Pensamos em *variável dependente* porque X é apenas uma função. Ela é "mensurável": todas as suas pré-imagens dos intervalos $]-\infty, k]$ estão em $\mathcal{F}$ e podem ser medidas por P. Não há nada de aleatório em X, sendo uma função muito bem fixada; esse adjetivo é usado porque o valor $X(\omega)$ depende do resultado ω de algum experimento, sorteio ou outro *fenômeno aleatório.*

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

A variável aleatória é apenas um modo de traduzir em números reais os possíveis resultados de um experimento que, por si próprios, podem não ser números reais (por exemplo, faces de um dado, pessoas para pesquisa de opinião, etc.). Separar a variável aleatória do espaço amostral permite também usar o mesmo espaço com diferentes variáveis.

Para definirmos a média ou esperança de uma variável aleatória, precisamos ferramentas muito avançadas que dão sentido a esta expressão: $E(X) = \int_\Omega X\, dP$. Em um curso introdutório de Probabilidade e Estatística, você verá P em termos de uma "distribuição" e a integração será feita normalmente sobre $\mathbb{R}$. Quando Ω é finito, porém, já podemos definir tudo explicitamente aqui:

Suponha Ω finito, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e P, X como acima:
O *valor esperado* de X é

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega).P(\{\omega\})$$

e a *variância* de X é

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} [X(\omega) - E(X)]^2.P(\{\omega\}).$$

Exercício
Mostre que $\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$.

(A notação $\sum_{\omega\in\Omega} F(\omega)$ significa isto: como Ω é finito, podemos escrever $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ em que os elementos de Ω são todos enumerados sem repetição; então aquela soma é $\sum_{i=1}^n F(\omega_i)$.)

Muita coisa ficou para baixo do tapete, como a linearidade de E (que é uma função com valores reais sobre o conjunto de variáveis aleatórias, que são funções por si próprias) e demais propriedades de E e Var. Porém, o exercício envolve operações entre funções, o que já estudamos. Você pode resolvê-lo assumindo a tal linearidade de E ou trabalhando sobre as definições. Para facilitar seus cálculos, trabalhe com $Y = X - E(X)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Notas e soluções

Pág. 13: $\boxed{a}$ Suponha que $a \in S$; note que isso implica que $a \in D$ e que $f(a) \in f[S]$. Queremos mostrar que $a \in f^{-1}[f[S]]$. Substituindo $f[S]$ em lugar de R na definição de pré-imagem, obtemos

$$f^{-1}[f[S]] = \{\, x \in D \mid f(x) \in f[S] \,\}.$$

Como a satisfaz as duas condições expressas com x que descrevem esse conjunto, ele é seu elemento, como desejado.

$\boxed{b}$ Suponha que $a \in f[f^{-1}[R]]$; queremos mostrar que $a \in R$. Substituindo $f^{-1}[R]$ em lugar de S na definição de imagem, obtemos

$$f[f^{-1}[R]] = \{\, f(x) \mid x \in f^{-1}[R] \,\}$$

e concluímos que a, para pertencer a esse conjunto, deve ser $f(b)$ para algum $b \in f^{-1}[R]$. Isso, por sua vez, requer que $f(b) \in R$ pela definição de pré-imagem. Desse modo, $a = f(b) \in R$, como desejado.

$\boxed{c}$ Sendo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, basta verificar que $f^{-1}[f[\{3\}]] = \{-3, 3\}$ e $f[f^{-1}[\{-3, 3\}]] = \{3\}$.

Pág. 22: $\boxed{a}$ Sendo f ímpar e tomando, em particular, $x = 0$, devemos ter $f(-0) = -f(0)$. Então $f(0) = -f(0)$, ou ainda $2f(0) = 0$, de que segue $f(0) = 0$. $\boxed{b}$ Ímpar. $\boxed{c}$ Par. $\boxed{d}$ Ímpar. $\boxed{e}$ Ímpar. $\boxed{f}$ Nem par nem ímpar. $\boxed{g}$ Ímpar. $\boxed{h}$ Ímpar. $\boxed{i}$ Ímpar. $\boxed{j}$ Nem par nem ímpar. $\boxed{k}$ Par. $\boxed{l}$ Ímpar. $\boxed{m}$ Par.

Pág. 25: $\boxed{a}$ $\chi_{P\cap Q} = \chi_P \chi_Q$ e $\chi_{P\cup Q} = \chi_P + \chi_Q - \chi_P \chi_Q$, onde o termo subtraído corresponde a $P \cap Q$ que seria contado duas vezes na soma $\chi_P + \chi_Q$.

$\boxed{b}$ $\chi_{P\times Q}$ terá como domínio um produto cartesiano, digamos $D \times E$, e será

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

preciso ter $P \subseteq D$ e $Q \subseteq E$. Nessa situação, $\chi_{P\times Q}(x,y) = \chi_P(x)\cdot\chi_Q(y)$; note que esse não é um produto de funções como estudaremos.

[c] $P \smallsetminus Q$ é a diferença de P e Q, ou seja, o conjunto apenas dos elementos de P que não pertencem a Q; temos $\chi_{P\smallsetminus Q} = \chi_P - \chi_P\chi_Q$. Já $P \vartriangle Q$ é a diferença *simétrica* entre P e Q, dada por

$$P \vartriangle Q = (P \smallsetminus Q) \cup (Q \smallsetminus P) = (P \cup Q) \smallsetminus (P \cap Q),$$

e $\chi_{P\vartriangle Q} = \chi_P + \chi_Q - 2\chi_P\chi_Q$. Ambas essas construções assumem $P, Q \subseteq D$.

Pág. 27: [a] Uma (qualquer) função $D \to C$ pode ser descrita tabulando-se cada elemento de D e seu elemento associado em C. Para cada um dos p elementos de D, podemos escolher dentre os q elementos de C, ou seja, a tabela terá p linhas e cada linha pode listar qualquer uma dentre q possibilidades. Assim, temos $q \times \ldots \times q$ modos de definir uma função, onde há p fatores, e, portanto, há q^p funções. Foi esse resultado que motivou a notação C^D para o conjunto de funções.

[b] Há apenas uma função, que é constante (com valor igual ao único elemento de C).

[c] Há uma função para cada elemento de C, que leva o único ponto de D a esse elemento.

[d] Há apenas uma "função vazia" que é degenerada.

[e] Ocorrem dois casos para considerarmos: se $D = \emptyset$ então $\emptyset^\emptyset$ é unitário (contém apenas a "função vazia") e se $D \neq \emptyset$ então $\emptyset^D = \emptyset$ (isto é, não há funções, porque cada elemento de D deveria ser associado a alguém em $\emptyset$).

Pág. 29: [a] $x^2 + 2x + 1$ e $x^2 + 1$, respectivamente.

Pág. 31: [a] Sim, porque $f^{-1}\colon C \to D$. Temos $(f \circ f^{-1})(u) = f(f^{-1}(u)) = f(x) = u$ onde $x = f^{-1}(u)$ e, por definição, esse x é tal que $f(x) = u$; analogamente, obtemos $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

[b] Injetora: se $f(x) = f(y)$ então $g(f(x)) = g(f(y))$, a que se aplica a descrição de $g \circ f$, donde $x = y$. Sobrejetora: dado $u \in C$, tome $x = g(u) \in D$, de modo que $f(x) = f(g(u)) = u$. Inversa: $f^{-1}(u) = x$ tal que $f(x) = u$, mas então $g(u) = g(f(x)) = x = f^{-1}(u)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\boxed{c}$ Por um lado, exp não é sobrejetora em $\mathbb{R}$, enquanto $\ln \circ \exp$ é identidade e $\exp \circ \ln$ não está definida em todo $\mathbb{R}$. Por outro lado, cos não é injetora, enquanto $\cos \circ \arccos$ é identidade, mas $\arccos \circ \cos$ não é identidade.

Pág. 36: $\boxed{a}$ Indicando $y = -x$, devemos mostrar que $-y = x$. Por definição, $y + (-y) = 0$, enquanto $y + x = (-x) + x = 0$ (comutatividade). Assim, $y + (-y) = y + x$ e podemos cancelar y.

$\boxed{b}$ Indique $z = x^{-1}$ para mostrar $z^{-1} = x$. Aplique o cancelamento a $zz^{-1} = 1 = zx$.

$\boxed{c}$ Note que $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = 0$, então $x - y = 0$ ou $x + y = 0$.

$\boxed{d}$ Para a 1ª igualdade, use $-z = (-1)z$ e associatividade. Para a 2ª, use a 1ª e $-(-z) = z$.

Pág. 37: $\boxed{a}$ Tanto 0 como a têm a mesma propriedade de "não acrescentar nada", então $a = 0 + a = 0$. Do mesmo modo, $b = 1b = 1$.

$\boxed{b}$ Basta escrever $x + y = x + (-x)$ e $xy = xx^{-1}$ e cancelar; no segundo caso, note que $x \neq 0$ porque, caso contrário, $xy = 0y = 0 \neq 1$.

$\boxed{c}$ Podem ser feitos pelas definições, comutatividade, associatividade e cancelamento: $(xy)(xy)^{-1} = 1 = (xy)(x^{-1}y^{-1})$, enquanto $xy \neq 0$ porque $x, y \neq 0$. Para a 1ª igualdade, pode-se também usar $-z = (-1)z$ e distributividade.

$\boxed{d}$ Pela própria definição, $1/x = 1x^{-1} = x^{-1}$. Para a 2ª igualdade, use $(-1)(-1) = 1$, faça $(-x)(-x)^{-1} = 1 = (-1)x(-1)x^{-1}$ por comutatividade e associatividade e cancele.

$\boxed{e}$ Use os axiomas para justificar esta seqüência de igualdades: $xy^{-1} + ab^{-1} = xy^{-1}bb^{-1} + ab^{-1}yy^{-1} = (xb + ay)(b^{-1}x^{-1}) = (xb + ay)(yb)^{-1}$. Para o segundo caso, faça $(xy^{-1})(ab^{-1}) = (xa)(y^{-1}b^{-1}) = (xa)(yb)^{-1}$.

Pág. 38: $\boxed{a}$ Use $1 = 1^2$.

$\boxed{b}$ Primeiramente, mostramos que se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$: caso contrário, $-x^{-1} > 0$ e vem $-1 = x(-x^{-1}) > 0$, absurdo. Agora, se tivermos $y > x > 0$ e $y^{-1} > x^{-1} > 0$, ao multiplicar obteremos $1 > 1$, contradição.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

[c] É possível ordenar $\mathbb{C}$ de inúmeros jeitos, determinando aleatoriamente qual número é maior ou menor que outro. Porém, é impossível fazê-lo *respeitando os axiomas apresentados:* $i \neq 0$ implicaria $-1 = i^2 > 0$, absurdo.

Pág. 44: [a] Como b_0 limita a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que forma um conjunto não-vazio), existe $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. Então x é maior que todos os a_n e, por ser supremo, menor que todos os limitantes superiores b_n, de modo que $x \in [a_n, b_n] = I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pág. 45: [a] Deveremos verificar, um por um, se 0, 1, 2, ... pertence ou não a S, o que requer um número não específico de passos, mas uma demonstração deve ser um texto fixo e limitado. Uma tentativa semelhante é argumentar que S tem algum elemento n e, portanto, seus elementos menores que n pertencem a

$$\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1, n\};$$

como esse conjunto é *finito,* algum dos elementos de S aí dentro deverá ser menor que todos os outros. O problema reside no termo italicizado: podem-se exibir, em cursos de Lógica ou Teoria dos Conjuntos, coleções parecidas com a destacada, mas que são infinitas, de modo que os axiomas de corpo ordenado não bastam para demonstrar essa propriedade.

[b] Como S é não-vazio e limitado inferiormente por 0, existe $K = \inf S$ e temos $K \geqslant 0$. Pela definição de ínfimo, deve existir $n \in S$ tal que $K \leqslant n < K + 1$. Então $n - 1 < K \leqslant n$ e, conforme nossa discussão na página 39, não há outro inteiro entre K e n. Logo, como $S \subseteq \mathbb{N}$, todos os outros elementos de S são maiores que n e obtivemos $n = \min S$. (De fato, temos $n = K$.)

[c] Dado um real $x > 0$, tome $n = \min\{\, k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant x\,\}$: então $n \geqslant x$, mas $n - 1 < x$, donde $x \leqslant n < x + 1$. Para $x < 0$, trabalhe com $-x > 0$. [d] Procederemos ciclicamente, isto é, provaremos que a 1ª propriedade implica a 2ª, que implica a 3ª, que implica a 1ª, então de qualquer uma podemos obter qualquer outra. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $K = 1/\varepsilon > 0$ e $n > K$, de modo que $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} = \varepsilon$. Dados $a, b > 0$, tome $\varepsilon = a/b > 0$ e $n \in \mathbb{N}^{\neq 0}$ tal que $1/n < \varepsilon$, donde $n > b/a$. Dado $K > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n1 > K$.

[e] Suponha primeiro reais positivos $x < y$: tome um natural $q > (y - x)^{-1}$ e, depois, o primeironatural $p > xq$; então $p - 1 \leqslant xq$, donde $x < p/q \leqslant x + 1/q < y$. Para $x < y < 0$, trabalhe com $-x > -y > 0$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 48: [a] Por substituição, P_0 é a proposição $0 = 0^2(0+1)^2/4$, que é verdade. Usando-se P_n, temos

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 &= [1^3 + 2^3 + \ldots + n^3] + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\Big[\frac{n^2}{4} + (n+1)\Big] = \\ &= (n+1)^2\,\frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Os extremos dessa seqüência de igualdades dão a equação

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = (n+1)^2[(n+1)+1]^2/4,$$

que é a proposição P_{n+1}.

[b] Base da indução: O único conjunto de 0 elementos é o vazio, que somente tem um subconjunto (ele próprio). Passo da indução: Suponha que o conjunto S tem $n+1$ elementos, sendo x um deles. Então $S \smallsetminus \{x\}$ tem n elementos e, assumamos, 2^n subconjuntos. Agora, um subconjunto de S pode conter x ou não; no segundo caso, é um dos 2^n subconjuntos de $S \smallsetminus \{x\}$, mas, no primeiro, é $\{x\} \cup A$ para precisamente um A desses 2^n subconjuntos. No total, obtivemos $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos de S.

[c] Verifica-se por substituição direta que a inequação apresentada vale para $n = 1, 2, 3$, mas não para $n = 4, 5$. Portanto, é impossível prová-la por indução a partir de $n = 1$. Vemos que $6! = 720$ é maior que $(6/3)^6 = 64$, sendo este o caso base e, para o passo da indução, calculamos

$$(n+1)! = (n+1)\,n! > (n+1)\Big(\frac{n}{3}\Big)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n} \cdot \frac{3}{3^{n+1}} = \Big(\frac{n+1}{3}\Big)^{n+1} \cdot \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

O limitante que usamos é demonstrado na página 88 e, de modo análogo, pode-se provar que também $n! < n^n/2^n$ quando $n \geqslant 6$.

[d] P_0 é a proposição $0 = 0(0+1)/2$, verdadeira. Usando-se P_n, temos

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (n+1) &= [1 + 2 + \ldots + n] + (n+1) = \\ &= n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n+2)/2 = (n+1)[(n+1)+1]/2, \end{aligned}$$

que é P_{n+1}.

[e] A base é o caso $n = 2$, que corresponde à regra dada. Para o passo, aplique a regra com $f = f_1 \ldots f_{n-1}$ e $g = f_n$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 49: $\boxed{a}$ Base: $(x+y)^1 = x^1y^0 + x^0y^1$. Passo (escreva as somatórias explicitamente): Assumimos que o coeficiente do termo $x^{n-k}y^k$ em $(x+y)^n$ é $\binom{n}{k}$. Fazemos $(x+y)^{n+1} = x(x+y)^n + y(x+y)^n$; então, no primeiro fator, o coeficiente do termo $x^{n+1-k}y^k = x(x^{n-k}y^k)$ é $\binom{n}{k}$; no segundo, o coeficiente de $x^{n+1-k}y^k = x^{n-(k-1)}y^{(k-1)+1} = y(x^{n-(k-1)}y^{k-1})$ é $\binom{n}{k-1}$. Note que isso requereu $k \leqslant n$ para usarmos a hipótese feita. Resta aplicar a identidade de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ e determinar explicitamente o coeficiente 1 de y^{n+1} no caso $k = n+1$.

Pág. 51: $\boxed{a}$ Soluções: -1 e 3. $\boxed{b}$ O conjunto de soluções é $[3, \infty[$.

$\boxed{c}$ Sol.: -4, -3, 1 e 2. Note que se pode antes determinar $|x+1|$ como solução da equação $y^2 - 5y + 6 = 0$.

$\boxed{d}$ Sol.: -3 e 1. Novamente, você pode determinar $|x+1|$ como solução de $y^2 + y - 6 = 0$.

$\boxed{e}$ Os pontos limítrofes são -2, 2 e 5:

- Caso $x < -2$, a desigualdade fica $x^2 + x - 9 \geqslant 0$, verdadeira se e somente se $x \leqslant (-1 - \sqrt{37})/2$ ou $x \geqslant (-1 + \sqrt{37})/2$. Esses números são negativo e positivo, respectivamente, mas nos interessa somente $x < -2$. Como $(-1-\sqrt{37})/2 < -2$ — para mostrá-lo sem calculadora, veja que precisamos $-1-\sqrt{37} < -4$, ou ainda $\sqrt{37} > 3$, o que é verdade —, concluímos que qualquer $x \leqslant (-1 - \sqrt{37})/2$ é solução.
- Caso $-2 \leqslant x < 2$, a desigualdade fica $x^2 - x + 1 \leqslant 0$, que não é satisfeita por nenhum x real.
- Caso $2 \leqslant x < 5$, novamente obtemos $x^2 + x - 9 \geqslant 0$: confira que $(-1 - \sqrt{37})/2 < 2$ e que $(-1 + \sqrt{37})/2 < 5$, de modo que contam apenas as soluções entre $(-1 + \sqrt{37})/2$ e 5.
- Finalmente, caso $x \geqslant 5$, temos $x^2 - x + 1 \geqslant 0$, o que é satisfeito por qualquer x real; para nós, a partir de 5.

Desse modo, o conjunto das soluções da desigualdade original é

$$\left]-\infty, \tfrac{-1-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\tfrac{-1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right[.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 54: $\boxed{a}$ Cjto. pts. acumulação $\emptyset$; isolados $\mathbb{Z}$; interiores $\emptyset$.

$\boxed{b}$ Cjto. pts. acumulação $[0,2]$; isolados $\emptyset$; interiores $]0,1[\cup]1,2[$.

$\boxed{c}$ Cjto. pts. acumulação $\{0\}$; isolados $\{\,\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^{\neq 0}\,\}$; interiores $\emptyset$.

Pág. 57: $\boxed{a}$ $[0,1[$ não é aberto porque contém 0 que não é interior; não é fechado porque não contém 1 que é ponto de acumulação. Nenhum ponto de $\mathbb{Q}$ lhe é interior, enquanto todo ponto real lhe é de acumulação. $\{\,\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^{\neq 0}\,\}$ não contém seu ponto de acumulação 0 e nenhum ponto seu é interior.

$\boxed{b}$ Um conjunto $A \neq \emptyset, \mathbb{R}$ deverá conter algum número a e não conter algum outro número b. Digamos que $a < b$; então podemos considerar $z = \sup\{\,x \in A \mid [a,x] \subseteq A\,\}$. Se A for fechado, devemos ter $z \in A$ porque ele é ponto de acumulação do conjunto do qual é supremo. Se A for aberto e $z \in A$, então devemos ter $\varepsilon > 0$ tal que $]z-\varepsilon, z+\varepsilon[\subseteq A$, mas então $[a, z+\frac{\varepsilon}{2}] \subseteq A$, contradizendo o fato de z ser supremo.

Pág. 67: $\boxed{a}$ O gráfico da função, ao redor de -2 e até 8, é uma reta com inclinação $-1/2$, de modo que tomamos $\delta = \min\{2\varepsilon, 10\}$. Agora, assuma que $(-2)-\delta < x < (-2)+\delta$. Então $-10-\delta < x-8 < -10+\delta$, donde

$$-5-\varepsilon < \frac{x-8}{2} < -5+\varepsilon.$$

Observando que $x < 8$, multiplicamos por -1 e, com cuidado com os sinais de desigualdade, obtemos

$$5-\varepsilon < \frac{|x-8|}{2} < 5+\varepsilon.$$

Pág. 68: $\boxed{a}$ A f-imagem de $]-\delta,\delta[$, para qualquer $\delta > 0$, é sempre $[-1,1]$. (Há mais que um "candidato" a limite.)

$\boxed{b}$ A f-imagem de $]-\delta,\delta[$ é $]\delta^{-1},\infty[$; conforme δ varia, não há nenhum número real comum a todas essas imagens. (Não há nenhum "candidato" a limite.)

$\boxed{c}$ "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$ (por menor que seja), encontra-se $x \in]a-\delta, a+\delta[$ de modo que $x \neq a$ e $f(x) \notin]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$." Em símbolos:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\; 0 < |x-a| < \delta \text{ e } |f(x)-L| > \varepsilon.$$

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\boxed{d}$ "Não existe $L \in \mathbb{R}$ de modo que, para qualquer $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que se $x \in]a-\delta, a+\delta[$ e $x \neq a$ então $f(x) \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. Em símbolos:

$$(\nexists L \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou ainda: "Para qualquer $L \in \mathbb{R}$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$ (por menor que seja), encontra-se $x \in]a-\delta, a+\delta[$ de modo que $x \neq a$ e $f(x) \notin]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$." Em símbolos:

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\, 0 < |x-a| < \delta \text{ e } |f(x) - L| > \varepsilon.$$

Pág. 73: $\boxed{a}$ Sol.: 0. $\boxed{b}$ Sol.: 2. $\boxed{c}$ Sol.: $3x^2$.

Pág. 74: $\boxed{a}$ Sol.: -1. $\boxed{b}$ Sol.: $\sqrt{6}$.

$\boxed{c}$ Sol.: 1. (Dica: multiplique "em cima e em baixo" por $\sqrt{t+1} + \sqrt{1-t}$, como se desfizesse a racionalização.)

Pág. 75: $\boxed{a}$ Sol.: 2. $\boxed{b}$ Sol.: 3. $\boxed{c}$ Sol.: 1. $\boxed{d}$ Sol.: 2. $\boxed{e}$ Sol.: 1.

$\boxed{f}$ Respectivamente: 1; 3; 1; 2; 2.

Pág. 76: $\boxed{a}$ Sol.: 2 e 0, resp. $\boxed{b}$ Sol.: 1 e -1, resp.

$\boxed{c}$ Sol.: o limite à direita é 0, mas à esquerda de -2 a função não está definida, então não se pode definir seu limite.

Pág. 79: $\boxed{a}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\, x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 81: $\boxed{a}$ Sol.: 1. $\boxed{b}$ Sol.: -4096. $\boxed{c}$ Sol.: 0 e 2, resp.

$\boxed{d}$ Sol.: 1/3. (A soma dos quadrados é $n(n+1)(2n+1)/6$, como determinamos por indução na pág. 46.

$\boxed{e}$ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$.

$\boxed{f}$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\, x < K \Rightarrow f(x) > M$ e outras três combinações análogas.

Pág. 84: $\boxed{a}$ Sol.: ∞. $\boxed{b}$ Sol.: ∞. $\boxed{c}$ Sol.: $-\infty$ (note que o numerador tende a -11 enquanto $t^2 - 25 > 0$). $\boxed{d}$ Sol.: ∞.

Pág. 86: $\boxed{a}$ Por exemplo, se $f \to -\infty$ e $g \geqslant \varepsilon > 0$, *nota-se que* f *é eventualmente negativa* e aplica-se o teorema a $fg \leqslant f\varepsilon$.

$\boxed{b}$ Sol.: 0. $\boxed{c}$ Sol.: 2.

Pág. 91: $\boxed{a}$ Dica: multiplique "em cima e em baixo" por $1 + \cos x$. Sol.: $\frac{1}{2}$.

$\boxed{b}$ Dica: substitua tg por sen e multiplique "em cima e em baixo" por $13120y$. Sol.: $\frac{320}{41}$.

$\boxed{c}$ Dica: substitua a^t por $e^{t \ln a}$ e multiplique "em cima e em baixo" por $\ln a$ para tratar $t \ln a$ como um "bloco". Sol.: $\ln a$.

$\boxed{d}$ Dica: transforme a expressão em um único logaritmo cujo argumento tende a e. Sol.: 1.

Pág. 94: $\boxed{a}$ Sol.: 1, que é $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$\boxed{b}$ Não, porque não existe $\lim_{x\to 2} g(x)$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 101: $\boxed{a}$ $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3$. $\boxed{b}$ Não existe $\dot{s}(0)$ e $\dot{s}(1) = -1$.
$\boxed{c}$ $g'(0) = 1$ e $g'(1) = e$. $\boxed{d}$ $\dot{x}(0) = 1$ e $\dot{x}(1) = \cos 1$.

Pág. 103: $\boxed{a}$ $y = 0$ e $y = \frac{\pi^3}{27} + \frac{\pi^2}{3}(x - \frac{\pi}{3})$.

$\boxed{b}$ Não há tangente em 0 e $y = \frac{3}{\pi} - \frac{9}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{3})$ em $\pi/3$.

$\boxed{c}$ $y = 1 + x$ e $y = e^{\pi/3} + e^{\pi/3}(x - \frac{\pi}{3})$.

$\boxed{d}$ $y = x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$.

Pág. 107: $\boxed{a}$ $-1/\operatorname{sen}^2 x$. $\boxed{b}$ $\operatorname{sen} x/\cos^2 x$. $\boxed{c}$ $-\cos x/\operatorname{sen}^2 x$.

$\boxed{d}$ Convém reescrever todas as potências usando expoentes negativos e/ou fracionários, obtendo-se

$$4te^t + 2t^2e^t - 4t^{-5}\operatorname{sen} t + t^{-4}\cos t - \tfrac{1}{3}t^{-2/3}\operatorname{tg} t + \frac{t^{1/3}}{\cos^2 t}.$$

$\boxed{e}$ Nesta solução, procede-se como na anterior, mas retornamos as potências às formas originais:

$$(4e^x - 6/x^4)(3\operatorname{sen} x)\sqrt[5]{x} + (4e^x + 2/x^3)(3\cos x)\sqrt[5]{x} + \frac{(4e^x + 2/x^3)(3\operatorname{sen} x)}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

$\boxed{f}$ $\dfrac{5(e^u \cos u(1-u) - e^u \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} u \cos u - u)}{(\exp u + \operatorname{sen} u)^2}$.

Pág. 109: $\boxed{a}$ $\sec^2(x^3) \cdot 3x^2$. $\boxed{b}$ $-\pi \operatorname{sen}(\exp(\pi x)) \exp(\pi x)$.

$\boxed{c}$ É a mesma expressão do exercício anterior, bastando substituir $u = x^2 - x$ naquela derivada e multiplicá-la por $(2x - 1)$.

$\boxed{d}$ $7(\operatorname{tg}(5^{t^4+\operatorname{tg}(2\pi t)}))^6 \cdot \sec^2(5^{t^4+\operatorname{tg}(2\pi t)}) \cdot (5^{t^4+\operatorname{tg}(2\pi t)}) \ln 5 \cdot (4t^3 + 2\pi \sec^2(2\pi t))$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 110: [a] Basta escrever $\log_{f(x)} g(x) = \dfrac{\ln g(x)}{\ln f(x)}$.

Pág. 111: [a] $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. [b] $\dfrac{-1}{x^2+1}$. [c] $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}$. [d] $\dfrac{-1}{\sqrt{x^4-x^2}}$.
[e] $\dfrac{40x^7}{x^8-4}$. [f] Pelo método,

$$(2x^4-3\cos x)^{5x-3+\sqrt{2x}} \times \\ \times \Big((5+x^{-1/2})\ln(2x^4-3\cos x) + \frac{(5x-3+(2x)^{1/2})(8x^3+3\operatorname{sen} x)}{(2x^4-3\cos x)}\Big).$$

[g] $\dfrac{1+\frac{1}{\ln 7}(2^t+2\pi\operatorname{sen}^{-1}t)(2^t\ln 2+2\pi(1-t^2)^{-1/2})}{2\sqrt{t+\log_7(2^t+2\pi\operatorname{sen}^{-1}t)}}$.

Pág. 112: [a] Conforme a sugestão, basta considerar a área A como função de um lado x do retângulo, então $A'(x) = 150 - 2x$ anula-se quando $x = 75$. Portanto, é um pasto de 75 m por 75 m.

Pág. 114: [a] Temos $A''(x) = -2 < 0$, de modo que a área é realmente máxima.

[b] Côncavo. [c] Convexo.

[d] $(n+\frac{1}{2})\pi + \frac{\pi}{6}$ são côncavos e $(n+\frac{1}{2})\pi - \frac{\pi}{6}$ são convexos, para $n \in \mathbb{Z}$.

Pág. 126: [a] Sol.: 0. [b] Sol.: 2. [c] Sol.: $3x^2$. [d] Sol.: -1. [e] Sol.: 1. [f] Sol.: 2 e 0. [g] Sol.: 1 e -1. [h] Sol.: 0. Não, porque a segunda função não está definida para $x < -2$.

Pág. 129: [a] Sol.: 1. [b] Sol.: -512. [c] Sol.: 0 e 2. [d] Sol.: 1/3.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 130: [a] Sol.: ∞. [b] Sol.: ∞. [c] Sol.: $-\infty$. [d] Sol.: ∞. [e] Sol.: $\pm\infty$. [f] Sol.: 0; tem a forma $(\frac{1}{2})^{\infty}$. [g] Sol.: ∞; tem a forma $(\frac{1}{2})^{-\infty}$.

Pág. 132: [a] Sol.: 1/2. [b] Sol.: 320/41. [c] Sol.: $\ln a$. [d] Sol.: 1.

Pág. 134: [a] Sol.: 0. [b] Sol.: 2. [c] Sol.: 0.

Pág. 137: [a] Sol.: 325/234. [b] Sol.: 1.

[c] Sol.: $-7/5$. (L'Hospital pode ser aplicado duas vezes, mas não uma terceira porque a forma em questão não será ∞/∞.)

[d] Sol.: 0. [e] Sol.: 1.

Pág. 141: [a] A definição em termos de ε e δ precisou ser adaptada porque não podemos escrever $x - \infty$ ou $f(x) - \infty$. Também a própria definição de ponto de acumulação precisa ser adaptada nesses casos: dizemos que ∞ é ponto de acumulação de $D \subseteq \mathbb{R}$ se este é um conjunto ilimitado superiormente; $-\infty$ é ponto de acumulação de conjuntos ilimitados inferiormente.

Pág. 143: [a] Sol.: 4. [b] Não; mas g original com domínio $\mathbb{R}^{\neq 2}$ é contínua. [c] Sol.: $a = 12$; $b = 1$; $c = 39$.

Pág. 145: [a] Determine um intervalo contendo a raiz com extremos inteiros, divida-o em subintervalos com extremos inteiros e comprimento unitário, depois repita as divisões sempre em dez subintervalos de mesmo comprimento.

Pág. 146: [a] Esse polinômio é negativo em -1, positivo em 0, negativo em 1 e positivo em 2; portanto, "troca de sinal" ao menos três vezes.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 158: $\boxed{a}$ $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3$. $\boxed{b}$ Não existe $\dot{s}(0)$ e $\dot{s}(1) = -1$.
$\boxed{c}$ $g'(0) = 1$ e $g'(1) = e$. $\boxed{d}$ $\dot{x}(0) = 1$ e $\dot{x}(1) = \cos 1$.

Pág. 159: $\boxed{a}$ $y = 0$ e $y = \frac{\pi^3}{27} + \frac{\pi^2}{9}(x - \frac{\pi}{3})$.

$\boxed{b}$ Não há reta em 0; $s = \frac{3}{\pi} - \frac{9}{\pi^2}(t - \frac{\pi}{3})$.

$\boxed{c}$ $y = 1 + x$ e $y = \frac{3}{\pi} - \frac{9}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{3})$.

$\boxed{d}$ $x = t$ e $x = \frac{3}{\pi} - \frac{9}{\pi^2}(t - \frac{\pi}{3})$.

Pág. 163: $\boxed{a}$ $4te^t + 2t^2e^t - 4t^{-5}\operatorname{sen} t + t^{-4}\cos t - \frac{1}{3}t^{-2/3}\operatorname{tg} t - \sqrt[3]{t}\sec^2 t$.

$\boxed{b}$ $(4e^x - 6x^{-4})(3\operatorname{sen} x)\sqrt[5]{x} + (4e^x + 2/x^3)(3\cos x)\sqrt[5]{x} + (4e^x + 2/x^3)(3\operatorname{sen} x)\frac{1}{5}\sqrt[5]{x^{-4}}$.

$\boxed{c}$ $\dfrac{(5\cos x - 5x\operatorname{sen} x)(\exp x + \operatorname{sen} x) - 5x\cos x(\exp x + \cos x)}{(\exp x + \operatorname{sen} x)^2}$.

Pág. 166: $\boxed{a}$ $-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi x))\cos(\pi x)\pi$.

$\boxed{b}$ $7\operatorname{sen}^6(5^{t^4+\operatorname{sen}(2\pi t)})) \cdot 5^{t^4+\operatorname{sen}(2\pi t)})\ln 5 \cdot (4t^3 + 2\pi\cos(2\pi t))$.

$\boxed{c}$ Basta tomar a resposta do exercício anterior, com $(x^2 - x)$ em lugar de x, e multiplicar por $(2x - 1)$. Obtemos:

$$\frac{(5\cos(x^2-x) - 5(x^2-x)\operatorname{sen}(x^2-x))(\exp(x^2-x) + \operatorname{sen}(x^2-x)) - 5(x^2-x)\cos(x^2-x)(\exp(x^2-x) + \cos(x^2-x))}{(\exp(x^2-x) + \operatorname{sen}(x^2-x))^2} \cdot (2x-1).$$

$\boxed{d}$ $5[\ln(12 - 3x^8)]^4(12 - 3x^8)^{-1}(-24x^7)$.

$\boxed{e}$ $(2x^4 - 3\cos x)^{5x-3+\sqrt{2x}}[(5 + 2(2x)^{-1/2})\ln(2x^4 - 3\cos x) + (5x - 3 + \sqrt{2x})\frac{8x^3 + 3\operatorname{sen} x}{2x^4 - 3\cos x}]$.

$\boxed{f}$ $\dfrac{1 + \frac{2^t \ln 2 + 2\pi/\sqrt{1-t^2}}{(2^t + 2\pi\operatorname{sen}^{-1} t)\ln 7}}{2\sqrt{t + \log_7(2^t + 2\pi\operatorname{sen}^{-1} t)}}$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 170: [a] Temos $h = 5\,\mathrm{tg}\,\theta$, donde $\frac{dh}{dt} = 5\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$. Nesse instante, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{60}$ rad/s, então $\frac{dh}{dt} = \frac{5\cdot\pi/60}{\cos^2\pi/3}$ km/s.

[b] Sol.: 16,7 atm e 5,56atm/s.

[c] Sol. aprox. 246 km/h. Observe que a velocidade relativa vetorial tem módulo aprox. 256 km/h e é maior porque não é paralela à linha entre o trem e o carro. Cf. deste autor, Interpretação das velocidades relativa e de afastamento no cálculo básico. *Educação Matemática em Revista,* n. 31, p. 39–42, 2013.

Pág. 173: [a] Usamos a função $f(x) = x - \cos x$. Com o MS Excel, por exemplo, usamos as colunas rotuladas A–D; a tabela a seguir fornece o código para a primeira linha, nas colunas B–D; em D2 inserimos =D1; "arrastando para baixo" em cada coluna, concluímos que o erro cometido já é menor que o especificado para $x_3 \approx 0{,}7390851$, cujo cosseno vale aprox. 0,7390852.

n	x_n	$-f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
	1	=–(B1–COS(B1))/(1+SIN(B1))	=B1+C1
0	1	−0,249636132	0,750363868
1	0,750363868	−0,011250977	0,739112891
2	0,739112891	$-2{,}77575\times10^{-05}$	0,739085133

Pág. 176: [a] Pelo TVM, $5 \leqslant \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} \leqslant 7$, donde $22 \leqslant f(3) \leqslant 30$. (Esses extremos são atingidos pelas funções $2+5(x+1)$ e $2+7(x+1)$.)

Pág. 177: [a] Temos $g(-3) > g(5)$; esses dois argumentos não pertencem a um único intervalo em que g seja derivável.

Pág. 181: [a] $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$.

[b] $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k/k$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

[c] $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ e $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}/(2n)!$.

[d] $(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ e $(1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

[e] $\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$.

[f] $\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ e $\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}^{-1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$

Pág. 191: [a] Basta restringir a função objetivo ao domínio $[0,1]$.

[b] Sol.: raio $\sqrt[3]{400/\pi}$ e altura $2\sqrt[3]{400/\pi}$, em centímetros.

[c] Sol.: aproximadamente 145 litros.

[d] Sol.: $400/\sqrt{39}$ quilômetros ao norte.

Pág. 204: [a] Multiplique antes de integrar; Sol.: $\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C$. [b] Faça

$$\int \frac{-1}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

[c] Divida antes de integrar; Sol.: $x^2 - 3\ln|x| - \frac{1}{9}x^{-3}$. [d] Faça

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int 1\,dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Pág. 205: [a] Sol.: $\frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$. [b] Sol.: $\frac{1}{2}\ln|x^2 + \sqrt{1+x^4}| + C$.
[c] Sol.: $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. [d] Sol.: $\ln|e^x - 1|+C$. [e] Sol.: $-\cos\ln|x|+C$.

Pág. 206: [a] Sol.: $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+k}^3+C$. [b] Sol.: $-\frac{1}{3}\sqrt{k-x^2}^3+C$. [c] Sol.: $\frac{1}{2}\ln|x^2+k| + C$. [d] Sol.: $-\frac{1}{2}\ln|k-x^2| + C$. [e] Sol.: $\sqrt{x^2+k}+C$.
[f] Sol.: $-\sqrt{k-x^2}+C$. [g] Veja texto.

[h] $\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$.

[i] $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$; absorvemos o termo $-\frac{a^2}{2}\ln a$ na constante de integração.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\boxed{j}$ $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$; mesmo procedimento.

$\boxed{k}$ $\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$; absorvemos o termo $-\ln a$ na constante de integração.

$\boxed{l}$ $\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$; mesmo procedimento.

$\boxed{m}$ $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

$\boxed{n}$ $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

$\boxed{o}$ $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

Pág. 207: $\boxed{a}$ Temos

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x\operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{d(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x},$$
$$\int \csc x\,dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x\cot x}{\csc x - \cot x}\,dx = \int \frac{d(-\cot x + \csc x)}{\csc x - \cot x}.$$

Pág. 208: $\boxed{a}$ Com $x = t^2+1$: $\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x-1}^3 + C$.

$\boxed{b}$ Com $u = x^2$: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$.

$\boxed{c}$ Com $u = 2x+5$: $\frac{(2x+5)^{502}}{2008} - \frac{5(2x+5)^{501}}{2004} + C$.

$\boxed{d}$ Com $x = e^t$: $-(\ln x)^{-1} + C$.

Pág. 209: $\boxed{a}$ Com $x = 3\operatorname{sen} t$: $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$.

$\boxed{b}$ Com $x = \operatorname{tg} t$: $\operatorname{arctg} x + C$.

$\boxed{c}$ Com $x = \operatorname{tg} t$: $\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$.

$\boxed{d}$ Com $x = \sec t$: $\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$.

Preliminar ©2015 Vinicius C.L.

Pág. 211: [a] Use a primitiva de $1/\operatorname{sen}^2 x$ tabulada para escrever $\int x\, d(-\cot x)$ e aplique partes. Sol.: $-x\cot x + \ln|\operatorname{sen} x| + C$.

[b] Com $x = e^t$, escreva $\int t\, d(e^{2t}/2)$ e aplique partes. Sol.: $\frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$.

[c] Com $x = e^t$, integre $\int t^2\, d(e^t)$ usando partes duas vezes. Sol.: $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$.

[d] Sol.: $\frac{1}{10}e^x \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{10}e^x \cos 3x + C$.

[e] Com $x = \operatorname{sen} t$, integre diretamente $\int t\, d(\operatorname{sen} t)$ por partes. Sol.: $x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$.

[f] Com $x = \operatorname{tg} t$, integre diretamente $\int t\, d(\operatorname{tg} t)$ por partes. Sol.: $x\operatorname{arctg} x + \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

[g] Veja texto.

[h] Com procedimento análogo ao do arco de raio 1: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$.

[i] Com procedimento análogo ao do arco de raio 1: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

[j] Use a primitiva de $\operatorname{arcsen} x$ obtida em item anterior para escrever

$$\int x\, d\big(x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\big),$$

aplique partes, isole a primitiva desejada e use a tabelada para $\sqrt{1-x^2}$. Sol.: $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + C$.

Pág. 214: [a] Sol.: $2x - 17\ln|x-2| + \frac{53}{2}\ln|x-3| + C$.

[b] Sol.: $-2x^2 + 7x - 3\ln|x| + \ln|x-1| - 3\ln|x+1| + C$.

[c] Sol.: $3x + \frac{31}{3}\ln|x-2| + \frac{14}{3}\ln|x-1| - \frac{28}{x-2} + C$.

[d] Sol.: $\frac{3}{x} - 7\ln|x| + 7\ln|2x-1| + C$.

Pág. 216: [a] Sol.: $\log(x^2+4x+5) - 7\operatorname{arctg}|x+2| + C$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

$\boxed{b}$ Sol.: $\ln|x^2+4x-2| + \frac{7\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{6}}{x+2-\sqrt{6}}\right| + C$.

$\boxed{c}$ Sol.: $\frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{10}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$.

Pág. 218: $\boxed{a}$ Sol.: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x+1| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|-x+1+\sqrt{2x^2+2}| + C$.

Pág. 220: $\boxed{a}$ Sol.: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln|\operatorname{tg}(x/2)-1+\sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln|\operatorname{tg}(x/2)-1-\sqrt{2}| + C$.

Pág. 229: $\boxed{a}$ Sol.: 6. $\boxed{b}$ Sol.: 12. $\boxed{c}$ Sol.: 1/2. $\boxed{d}$ Sol.: 8. $\boxed{e}$ Sol.: 98/3. $\boxed{f}$ Sol.: 775.

Pág. 240: $\boxed{a}$ Sol.: $2\pi^2 Rr^2$. (O toro pode ser obtido com rotação em torno do eixo Ox das funções $R+\sqrt{r^2-x^2}$ e $R-\sqrt{r^2-x^2}$ no domínio $[-r,r]$.)

Pág. 242: $\boxed{a}$ Sol.: $4\pi^2 Rr$.

Pág. 266: $\boxed{a}$ Sol.: 14/3. $\boxed{b}$ Sol.: 0. $\boxed{c}$ Sol.: 16. $\boxed{d}$ Sol.: $(2^{82}-1)/3321$. $\boxed{e}$ Sol.: $32(e-1)/3$.

Pág. 267: $\boxed{a}$ Sol.: 12/5. $\boxed{b}$ Sol.: $\pi/6$.

Pág. 269: $\boxed{a}$ Temos

$$\int_H 1\, d(x,y) = \int_a^b \int_0^{\varphi(x)} 1\, dy\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Para contemplar as duas ordens de integração possíveis, calcularemos

$$\int_{[a,b]\times[0,k]} \chi_H(x,y)\, d(x,y)$$

em que $\chi_H\colon [a,b]\times[0,k] \to \mathbb{R}$, que vale 1 se (x,y) pertence a H, ou 0 caso contrário. A ordem usada acima é dada por

$$\int_a^b \int_0^k \chi_H(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \left(\int_0^{\varphi(x)} \cancelto{1}{\chi_H(x,y)}\, dy + \int_{\varphi(x)}^k \cancelto{0}{\chi_H(x,y)}\, dy \right) dx,$$

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

enquanto que o cálculo de

$$\int_0^k \int_a^b \chi_H(x,y)\,dx\,dy$$

é complicado por $\chi_H(x,y)$ alternar valor várias vezes para cada y fixo.

Pág. 270: $\boxed{a}$ Solução:

$$\int_0^2 \int_{y/3}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^6 \int_{y/3}^{2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\boxed{b}$ Solução:

$$\int_0^2 \int_6^9 f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{3y}^{9} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Pág. 272: $\boxed{a}$ Sol.: $5\pi\sqrt{35}$. Dica: $\int_D 1\,d(x,y)$ é a área do círculo e não precisa ser calculada!

Pág. 277: $\boxed{a}$ Temos

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ r\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -r < 0$$

e $|J_\Phi| = r$.

$\boxed{b}$ É importante conferirmos o sinal: temos $r^2 \geqslant 0$ (sempre) e $\operatorname{sen}\varphi \geqslant 0$ porque $\varphi \in [0,\pi]$.

Pág. 278: $\boxed{a}$ Da figura, obtemos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u = r\cos(\theta-\alpha) \\ v = r\operatorname{sen}(\theta-\alpha) \end{cases},$$

de modo que podemos calcular

$$x = r\cos[(\theta-\alpha)+\alpha] = r\cos(\theta-\alpha)\cos\alpha - r\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

e analogamente quanto a y.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 282: [a] A imagem de $[-1,1]$ é o semicírculo direito; usando $(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, pode-se cobri-lo todo com parâmetros reais em um intervalo limitado.

Pág. 283: [a] Comprimento: $\sqrt{4\pi^2+1}(e^2-e^{-2})$; tangentes

$(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(0,2\pi,1)$ e
$(x,y,z) = (\cos(2\pi e), \operatorname{sen}(2\pi e), e) + \lambda(-2\pi e \operatorname{sen}(2\pi e), 2\pi e \cos(2\pi e), e)$,

respectivamente, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pág. 288: [a] Sol.:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = z\operatorname{sen}(yz)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,\pi) = 0$;
- $\frac{\partial f}{\partial y} = xz^2\cos(yz)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,\pi) = \pi^2$;
- $\frac{\partial f}{\partial z} = x\operatorname{sen}(yz) + xyz\cos(xz)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,\pi) = -2\pi$.

[b] Sol.: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1-yf(x,y)}{xy+3(f(x,y))^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-xf(x,y)}{xy+3(f(x,y))^2}$.

Pág. 290: [a] Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{b^6-a^2b^2}{(a^2+b^4)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{2ab(1-2b^4)}{(a^2+b^4)^2};$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Finalmente, a curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$, é contínua, porque cada componente sua é uma função contínua, de modo que se f for contínua então $g = f\circ\gamma$ também o será. Contudo, $g(0) = f(0,0) = 0$ enquanto

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\sqrt{t}^2}{t^2+\sqrt{t}^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2t^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Pág. 291: [a] Sol.: $\frac{\partial f}{\partial u}(1,3,-2) = -22/5$, com $u = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 292: $\boxed{a}$ Quanto à norma, temos

$$\|e_i\| = \Big(\sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2\Big)^{1/2} = \Big(e_{ii}^2 + \sum_{j\neq i} e_{ij}^2\Big)^{1/2} = \Big(1^2 + \sum_{j\neq i} 0^2\Big)^{1/2} = 1.$$

Para as derivadas, basta calcular

$$\begin{aligned} a + he_i &= \sum_{j=1}^{n} a_j e_j + he_i = \\ &= (a_i + h)e_i + \sum_{j\neq i} a_j e_j = \\ &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

sendo os demais termos idênticos em ambos os limites.

Pág. 294: $\boxed{a}$ Sol.: $\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2y^2 - 10x^4$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^3y$ e

$$H_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24xy^2 - 40x^3 & 24x^2y \\ 24x^2y & 8x^3 \end{vmatrix} = -384x^4y^2 - 320x^6.$$

Pág. 305: $\boxed{a}$ Sol.: $\operatorname{grad} f = (10xy, 5x^2 - 3z\cos y, -3\operatorname{sen} y)$, $\operatorname{div} F = 2xy - y^2\operatorname{sen}(yz)$, $\operatorname{rot} F = (\cos(yz) - y^2\operatorname{sen}(yz) - 2x, 0, 2z - x^2)$.

Pág. 310: $\boxed{a}$ Sol.: $\operatorname{grad}(x^5y^3 - 7x + \operatorname{sen}(yz) + C)$.

$\boxed{b}$ Sol.: $F = \operatorname{grad}(2x^2y + xz + 5yz^3 + C)$.

$\boxed{c}$ Sol.: $\operatorname{grad}\Big(\dfrac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\Big)$; em Física o sinal é trocado para que o gradiente seja o oposto do campo.

Pág. 313: $\boxed{a}$ Respectivamente: $(-24, -49)$ (ou outro vetor que tenha mesma direção e sentido); $(24, 49)$; $(49, -24)$ e $(-49, 24)$.

Pág. 317: $\boxed{a}$ Temos $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^3$, $c = 5$ e $a = (0, 1, -1)$; verificamos que $f(a) = c$; obtemos a reta normal $(x, y, z) = (0, 1 + 4\lambda, -1 - 9\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e o plano tangente $4y - 9z - 13 = 0$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 320: [a] Temos $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$; escrevamos $v \in \mathbb{R}^p$ e $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Assim: podemos somar f, g se e somente se $p = m$ e $q = n$, de modo que $(f+g)(x) = (u+v)+(A+B)x$ já escrita na forma de 1ª ordem; podemos compor g com f se e somente se $q = m$, donde $(g \circ f)(x) = (v+Bu)+(BA)x$ já como 1ª ordem.

Pág. 323: [a] Quando $m = 1$, a função f é escalar e temos, como matriz linha, $f'(a) = \nabla f(a)$. Quando $n = 1$, a função f é uma curva e a matriz coluna $f'(a)$ é seu vetor tangente no ponto $f(a)$. Quando $m = n = 1$, simplesmente f é uma função escalar de uma variável e $f'(a)$ é uma matriz 1×1 cuja única entrada é o número $f'(a)$.

Pág. 330: [a] Sol.: $2\pi - 62$.

Pág. 336: [a] Escrevendo f_{xy} em vez de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ etc., o polinômio em questão é

$$\begin{aligned} f(a,b) &+ f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ &+ \tfrac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + \\ &+ \tfrac{1}{6} f_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + \tfrac{1}{2} f_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + \\ &+ \tfrac{1}{2} f_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + \tfrac{1}{6} f_{yyy}(a,b)(y-b)^3. \end{aligned}$$

No caso de $f(x,y) = x^5 y^7$, basta substituir:

$$\begin{aligned} a^5 b^7 &+ 5a^4 y^7 (x-a) + 7a^5 b^6 (y-b) + \\ &+ 10a^3 b^7 (x-a)^2 + 35a^4 b^6 (x-a)(y-b) + 21a^5 b^5 (y-b)^2 + \\ &+ 10a^2 b^7 (x-a)^3 + 60a^3 b^6 (x-a)^2 (y-b) + \\ &+ 105a^4 b^5 (x-a)(y-b)^2 + 35a^5 b^4 (y-b)^3. \end{aligned}$$

Pág. 338: [a] Este é um exercício de Demidovitch (1976), cuja solução é mais elaborada. É apenas combinatórico e não envolve Análise; porém, esclarece dificuldades com a leitura de expressões nos polinômios de Taylor.

O "pulo do gato" é observar que $(x_i - a_i)$ é constante, não só com respeito às variáveis x_j, $j \neq i$, mas à própria x_i. De fato, x é um vetor fixo quando se deduz a expressão da série de Taylor; infelizmente, as variáveis têm o mesmo nome. Pelo mesmo motivo, calculam-se apenas as derivadas em a, não os termos $x_i - a_i$, o que anularia tudo.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Assim, escrevendo-se $D_i = (x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$, vem $D_i^{s_i} = (x_i - a_i)^{s_i}\frac{\partial^{s_i}}{\partial x_i^{s_i}}$. Por Schwarz, $D_iD_j = D_jD_i$ quando $i \neq j$, de modo que podemos simplificar repetições com expoentes.

Calculemos $\left(\sum_{i=1}^n D_i\right)^k$: por distributividade, escolha um termo de cada soma no produto, obtendo

$$\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} D_{i_1} \dots D_{i_k}.$$

Simplifique repetições usando expoentes e escreva em ordem usando comutatividade:

$$\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\dots<j_e\leqslant n \\ r_1+\dots+r_e=k \\ r_1,\dots,r_e\geqslant 1}} \underbrace{\frac{k!}{r_1!\dots r_e!}}_{\text{número de permutações com repetições}} D_{j_1}^{r_1}\dots D_{j_e}^{r_e}.$$

Introduza "repetições 0 vezes" para operadores D_j que não aparecem, com $0! = 1$:

$$\sum_{\substack{s_1+\dots+s_n=k \\ s_1,\dots,s_n\geqslant 0}} \frac{k!}{s_1!\dots s_n!} D_1^{s_1}\dots D_n^{s_n}.$$

O fator $k!$ cancela-se e, em vista da discussão acima,

$$[D_1^{s_1}\dots D_n^{s_n} f]_{\text{em } a} = (x_1 - a_1)^{s_1}\dots(x_n - a_n)^{s_n}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}(a).$$

Por exemplo, $(D_1D_2f)_{\text{em } a} = (x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2}f|_{\text{em } a} = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a)$.

Pág. 345: [a] O método indica o ponto $(19/3, 17/6, 47/6)$ (no plano) como o mais próximo, então a menor distância é $17/\sqrt{6}$. [b] BAILEY, H. R. "Hidden" boundaries in constrained max-min problems. *The College Mathematics Journal,* v. 22, n. 3, 1991, p. 227–229.

Pág. 360: [a] Sol.: 20 em maquinário e 40 em funcionários. [b] Sol.: $240 \cdot 2^{2/3} \approx 380{,}98$. [c] Obteve-se $\lambda = 4 \cdot 2^{2/3} \approx 6{,}35$, de modo que a nova produtividade seria a soma da original com a variação 2λ: 393,68.

[d] Sol.: diâmetro e altura iguais a $4\sqrt[3]{50/\pi}$. [e] Sol.: 15 filmes e 9 jogos.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Pág. 361: [a] Sol.: $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. [b] Fixe A, tome $g(x) = x_1 + \ldots + x_n = nA$ e $f(x) = x_1 \ldots x_n$.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Bibliografia comentada e sugestões

Se você já possuir e gostar de um texto de Cálculo de um curso anterior, ou estiver mais acostumado com sua apresentação, desde detalhes técnicos (como notação) até o nível das explicações e a localização dos assuntos, então continue a utilizá-lo. "Livro de Cálculo" é, antes de tudo, uma questão de gosto pessoal, porque o conteúdo matemático dos bons livros deverá ser sempre o mesmo e incluir, obrigatoriamente, os assuntos que cobrimos neste guia.

A coleção mais popular por um autor nacional é:

> GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo,* 5ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2001.

Ela faz, simultaneamente, uma apresentação completa e rigorosa do assunto, mas pode ser considerada técnica demais. Há outros autores brasileiros cuja obra segue ou não essa linha, como Paulo Boulos & Zara.

Os livros americanos são comumente traduzidos, mas, se você tiver acesso ao original em inglês, prefira-o. Geralmente, o autor americano de Cálculo básico deseja apresentar a matéria com um mínimo de rigor matemático, sem obstruir as idéias principais, e extrair motivações, raciocínios e aplicações do mundo natural usando uma linguagem fluente. Porém, para acomodar diversas abordagens, submete-se ao gigantismo e faz apartes demasiados à margem do fluxo de pensamento principal.

Este é o autor americano usualmente mais recomendado:

> STEWART, James. *Cálculo Volume I,* 6ª ed., tradução de Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2010. (Título original: *Calculus: Early Transcendentals.*)

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Ele "conversa mais" com o estudante e mantém os comentários marginais em um mínimo. Outros autores são Thomas & Finney, Edwards & Penney, Simmons, Leithold, Spivak e até Apostol...

Dentre as outras vertentes culturais, a escola da região e da época soviéticas prefere redação direta, diagramas simples, cuidado simultâneo com o rigor lógico, a intuição e as aplicações, exemplos extraídos diretamente de métodos industriais e exercícios variadamente difíceis.

Dessa escola, recomendamos este:

> DEMIDOVITCH, B. et al. *Problems in Mathematical Analysis,* tradução de G. Yankovsky. Moscow: Peace Publishers, 1976.

É um compêndio de exercícios de diversos graus de dificuldade, sempre precedidos de um curto resumo da teoria necessária e com sumário de soluções, e é útil nos diversos cursos básicos de Cálculo e Equações Diferenciais. (Atente para diversas grafias do nome dos colaboradores mais citados: Baranenkov e Demidovitch.) Em português, seu título é "Problemas e Exercícios de Análise Matemática".

Especificamente sobre a primeira parte, "Bases", qualquer livro ou apêndice de Pré-Cálculo poderá ajudá-lo, assim como seus próprios livros escolares. Destes últimos, por exemplo:

> IEZZI, G. et al. *Matemática Volume Único,* 5ª ed. São Paulo: Atual, 2011.

Para uso no curso homônimo da UFABC, desde seu início, Armando & Daniel elaboraram:

> CAPUTI, A.; MIRANDA, D. *Bases Matemáticas* (em desenvolvimento).

Estude também seu apêndice sobre álgebra, polinômios, matrizes e sistemas lineares.

Não cobrimos, neste guia, dois cursos que também fazem parte do ciclo básico de Matemática na UFABC: os de Geometria Analítica e Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. Contudo, GA é uma ferramenta importante no Cálculo e você deverá conhecer, especialmente para "Várias Variáveis", os tópicos de sistemas de coordenadas, vetores, equações paramétricas, curvas e superfícies, entre outros. O livro-texto mais utilizado e atual é o de Paulo Boulos & Ivan:

> BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria Analítica:* um tratamento vetorial, 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Há também o material elaborado por Daniel, Rafael & Sinuê na UFABC:

> MIRANDA, D.; GRISI, R.; LODOVICI, S. *Geometria Analítica e Vetorial* (em desenvolvimento).

Já IEDO continua o estudo de problemas e aplicações do Cálculo, mas cujas soluções agora vão além do Teorema Fundamental de integração. Para tanto, propomos o nosso:

> VINICIUS C. L. *EDO na Graduação* (em desenvolvimento).

Lembramos que o manual de Demidovitch também contempla essa matéria.

Finalmente, caso você tenha curiosidade em estudar mais profundamente as entidades matemáticas e as demonstrações mais rigorosas que fundamentam o Cálculo e que foram originadas por ele, poderá ingressar no estudo da Análise, um dos amplos ramos da Matemática abstrata. Experimente:

> RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis,* 3ª ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1976.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015

Notas sobre o conteúdo e a organização

Preliminar ©2015 Vinicius C. L.

G. Calc ©2015 Vinicius Cifú Lopes. Versão preliminar: UFABC, 1º quad. 2015